UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
CAMPUS CENTRAL
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Iniciativa Académica de Teoría de la Medida e Integración

1 Identificación

Curso:	MM3010 – Teoría de la Medida	**Créditos:**	4
Ciclo:	Primero	**Requisitos:**	Análisis de Variable Real 2
Año:	2023		Topología de Espacios Métricos
Profesor:	Alan Reyes–Figueroa	**Horario:**	Lunes y miércoles – 19:00-20:35
Email:	`agreyes`	**Sala:**	CIT-545.

Sitio Web del Curso:

- https://pfafner.github.io/tm2023

Office Hours:

- Viernes de 18:00 a 20:00 hrs, por solicitud del estudiante. Pueden enviar sus dudas por correo electrónico.

2 Descripción

Este es un curso introductorio al estudio de la teoría de la medida e integración. El tema central del curso es el estudio de las diferentes nociones de integración que se utilizan en el análisis matemático. Como base fundamental, se estudia la teoría de la medida, la cual sienta las bases para el desarrollo de diferentes teorías de integración.

El curso comienza con una revisión de algunas teorías de integración como Riemann y Riemann-Stieltjes, y sus propiedades. Luego, se hace un estudio de conceptos fundamentales como σ-álgebras, π-sistemas y λ-sistemas, conjuntos Borelianos, y la axiomática de los espacios de medida; y se introduce la medida exterior de Lebesgue. Seguidamente se estudian teoremas de existencia y unicidad, y teoremas sobre extensión de medidas a espacios producto, primero para la medida de Lebesgue, luego para medidas abstractas.
Se continúa con el estudio integración de medidas positivas, y se prueban los teoremas fundamentales de la teoría de la medida, como los teoremas de convergencia monótona y convergencia limitada, y se hace una introducción a los espacios L^p, así como a la jerarquía de modos de convergencia. Se estudian las medidas con signo, y conceptos de descomposición y derivada entre medidas. Finalmente se desarrolla la integral de Lebesgue-Stieltjes, y la teoría de integración de Kurzweil-Henstock.
Si el tiempo lo permite, se hace una introducción a otras teorías de integración más generales como integración estocástica y se revisan algunas aplicaciones, principalmente algunos resultados de la teoría de probabilidades.
Es necesario que los estudiantes estén familiarizados con resultados de análisis real (en una y varias variables), topología de espacios métricos, y que tengan un dominio hábil de herramientas de álgebra lineal y cálculo.

3 Competencias a Desarrollar

Competencias genéricas

1. Piensa de forma crítica y analítica.
2. Resuelve problemas de forma efectiva.

3. Desarrolla habilidades de investigación y habilidades de comunicación científica a través de seminarios y presentaciones ante sus colegas.

Competencias específicas

1.1 Describe las propiedades generales de medidas y los espacios medida.

1.2 Conoce y domina los principales teoremas relacionados con la construcción de medidas.

1.3 Comprende los conceptos y resultados principales asociados a la teoría de la medida: σ álgebras, conjuntos Borelianos, funciones y mapas mesurables, espacios de medida.

2.1 Domina las técnicas y demostraciones de los resultados principales la teoría de la medida e integración.

2.2 Comprende los pasos esenciales en cada demostración. Argumenta correctamente los teoremas. Aplica estas técnicas para resolver problemas.

2.3 Utiliza un enfoque global para resolver problemas. Utiliza herramientas auxiliares en su solución, como análisis matemático, secuencias, funciones y topología, entre otros.

3.1 Desarrolla todas las etapas de una investigación o proyecto aplicado donde se utilizan elementos de la teoría de la medida: anteproyecto, diseño experimental, resultados principales y conclusiones.

3.2 Escribe un artículo científico o reporte técnico sobre un tópico de interés en teoría de la medida o aplicaciones, concretando análisis rigurosos y conclusiones importantes.

3.3 Comunica de manera efectiva, en forma escrita, oral y visual, los resultados de su investigación.

4 Metodología Enseñanza Aprendizaje

El curso se desarrollará durante diecinueve semanas, con cuatro períodos semanales de cuarenta y cinco minutos para desenvolvimiento de la teoría, la resolución de ejemplos y problemas, comunicación didáctica y discusión. Se promoverá el trabajo colaborativo de los estudiantes por medio de listas de ejercicios.

El resto del curso promoverá la revisión bibliográfica y el auto aprendizaje a través de la solución de los ejercicios del texto, y problemas adicionales, y el desarrollo de una monografía. Se espera que el estudiante desarrolle su trabajo en grupo o individualmente, y que participe activamente y en forma colaborativa durante todo el curso.

5 Contenido

1. Teorías clásicas de integración: construcción de Darboux e integral de Riemann. Propiedades y limitaciones. La integral de Riemann-Stieltjes. Criterios de integrabilidad y existencia. Propiedades y resultados importantes: aditividad, integración por partes, Teorema del valor medio, Teorema fundamental, cambio de variable, teoremas de convergencia. relación entre Riemann-Stieltjes y Riemann. Funciones de variación limitada.

2. La medida exterior de Lebesgue: Medida exterior. El conjunto de Cantor. Conjuntos Lebesgue mesurables. Propiedades de la medida de Lebesgue. Caracterizaciones de mesurabilidad.

3. Construcción y extensión de medidas: $\sigma-$álgebras, $\pi-$sistemas, $\lambda-$sistemas, el Lema de Dynkin. Conjuntos Borelianos. Medidas en espacios abstractos. Propiedades, propiedades de convergencia: Teorema de Borel-Cantelli. Existencia y unicidad de medidas. Teorema de extensión de Carathéodory.

4. La integral de Lebesgue: Funciones mesurables y funciones semi-continuas. Propiedades. Teorema de Egorogff. Teorema de Lusin. Convergencia en medida.
   La integral de Lebesgue para funciones no-negativas. Propiedades de la integral. La integral para funciones mesurables. Relación entre la integral de Riemann-Stieltjes y Lebesgue.

5. Teoremas de Convergencia: Lema de Fatou. Teorema de Convergencia Monótona. Teorema de Convergencia Dominada. Medidas positivas y medidas con signo. Espacios L^p. Desigualdases. Jerarquía y modos de convergencia: convergencia en media, convergencia uniforme, convergencia $\mu-$c.t.p., convergencia en medida. Teorema de Convergencia de Vitali.

6. Descomposición de medidas: Teoremas de descomposición de Hahn y de Jordan. El Teorema de Radon-Nikodym. El Teorema de Descomposición de Lebesgue. Teorema de Representación de Riesz en espacios L^p.

7. Medidas e integración en espacios producto: Medidas producto. El Teorema de Fubini-Tonelli. La integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$.

8. Otros tópicos: La integral de Lebesgue-Stieltjes. La integral de Kurzweil-Henstock. Aplicaciones a la teoría de probabilidades. Medidas de Hausdorff.

6 Bibliografía

Textos:

- Robert Bartle (2011) *The Elements of Integration and Measure Theory*, John Wiley Sons. 2a. edición.
- René L. Schilling. (2017). *Measures, Integrals and Martingales*, Cambdrige University Press. 2a. edición.

Notas de clase:

- E. Kowalski (2016). *Measure and Integral*. ETH-Zürich https://people.math.ethz.ch/~kowalski/measure-integral.pdf

Referencias adicionales:

- Robert Bartle (1980). *The Elements of Real Analysis*. Limusa, 2a ed.
- Halsey Royden, Patrick Fitzpatrick (2010). *Real Analysis*. Prentice Hall, 4a. ed.
- A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, Richard A. Silverman (1975). *Introductory Real Analysis*. Dover.
- Walter Rudin (1987). *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill.
- Gerald B. Folland (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley-Interscience.
- Heinz Bauer (2006). *Measure and Integration Theory*. De Gruyter Studies in Mathematics 26.
- Vladimir I. Bogachev (2007). *Measure Theory*. Volumes I and II. Springer.
- Richard Wheeden, Antoni Zygmund (2015). *Measure and Integral: an Introduction to Real Analysis*.

7 Actividades de evaluación

Actividad	Cantidad aproximada	Porcentaje
Listas de ejercicios	7	70%
Seminario	2	30%

8 Cronograma

Semana	Tópico	Fecha	Actividades
1	Introducción y motivación al curso. Integral de Riemann. Propiedades y limitaciones.	09-13 enero	
2	Integral de Riemann-Stieltjes. Propiedades. Teorema del valor medio. Teorema Fundamental.	16-20 enero	
3	Criterios de integrabilidad y existencia. Funciones de variación limitada.	23-27 enero	
4	La medida exterior de Lebesgue. Propiedades. Conjuntos Lebesgue mesurables.	30 enero-03 febrero	
5	$\sigma-$álgebras, $\pi-$sistemas, $\lambda-$sistemas Teorema de Dynkin. Conjuntos Borelianos.	06-10 febrero	
6	Medidas y espacios de medida. Ejemplos. La medida de Lebesgue.	13-17 febrero	
7	Teoremas de existencia y unicidad sobre medidas Teorema de extensión de Carathéodory.	20-24 febrero	
8	Funciones mesurables y semi-continuas. Integral de Lebesgue para funciones no-negativas.	27 febrero-03 marzo	
9	Propiedades de la integral de Lebesgue. Integrales de funciones mesurables.	06-10 marzo	
10	Medidas positivas y medidas con signo. Medidas absolutamente continuas.	13-17 marzo	
11	Teoremas de convergencia: Lema de Fatou, convergencia monótona y dominada.	20-24 marzo	
12	Convergencia uniforme. Teorema de Egoroff y Teorema de Vitali.	27-31 marzo	
	Semana Santa	03-07 abril	
13	Los espacios L^p. Completitud. Desigualdades y convexidad.	10-14 abril	
14	Modos y jerarquías de convergencia.	17-21 abril	Seminario
15	Medidas en espacios producto. Teorema de Fubini-Tonelli. Integral en $\mathbb{R}^d$.	24-28 abril	
16	Descomposición de medidas. Teorema de Descomposiciòn de Hahn.	01-05 mayo	
17	Derivación de medidas. El Teorema de Radon-Nikodym.	08-12 mayo	
18	Medidas de Hausdorff. La integral de Lebesgue-Stieltjes.	15-19 mayo	
19	La integral de Kurzweil-Henstock. Propiedades y resultados importantes.	22-26 mayo	Seminario
20	Presentación de Seminarios.	29 mayo-02 junio	Seminario