Teoría de la Medida e Integración 2023

Lista 6

23.abril.2023

1. (a) Probar que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
   (b) Probar que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

2. Sea $X = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$, y sea $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una medida multiplicativa, esto es

$$\int fg\, d\mu = \Big(\int f\, d\mu\Big)\Big(\int g\, d\mu\Big),$$

   para todas las funciones $f, g : X \to \mathbb{R}$ continuas. Identificar a μ.

3. Sea $c \in (0,1)$ fijo. Definamos $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{1-y}{x-y}\right)^c, & 0 \leqslant y < x,\ 0 < x < 1; \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

   Compruebe que $F \in mL^1(\mathbb{R}^2)$ respecto de la medida $\lambda^2 = \lambda^1 \times \lambda^1$ y hallar la integral

$$\int F\, d\lambda^2.$$

4. Sean $X = Y = [-1,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{B}([-1,1])$, y sean $\mu = \nu = \lambda^1$, la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Estudiar la integrabilidad de la función $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x^2+y^2 = 0; \\ \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}; & x^2+y^2 > 0. \end{cases}$$

   En particular, determinar las funciones "marginales", determinar si f satisface el teorema de Fubini, y estudiar qué ocurre con la integral de f en la medida producto $\pi = \mu \times \nu$.

5. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable, y sean $\nu, \nu_1, \nu_2 : \mathcal{A} \to$ medidas con signo. Mostrar que
   a) $\nu_1 \perp \nu_2 \;\Rightarrow\; \nu_2 \perp \nu_1$.
   b) $\nu_1 \perp \nu$ y $\nu_2 \perp \nu \;\Rightarrow\; \nu_1 + \nu_2 \perp \nu$.
   c) $\nu_2 \ll \nu_1 \;\Leftrightarrow\; |\nu_2| \ll \nu_1 \;\Leftrightarrow\; |\nu_2| \ll |\nu_1| \;\Leftrightarrow\; \nu_2^+, \nu_2^- \ll \nu_1$.
   d) Si $\nu_2 \ll \nu$ y $\nu \perp \nu_1 \;\Rightarrow\; \nu_2 \perp \nu_1$.
   e) Si $\nu_1 \ll \nu$ y $\nu_1 \perp \nu$, entonces $\nu_1 \equiv 0$.

6. Demostrar que el Teorema de Radón-Nikodym falla si μ no es σ-finita, aunque ν sea finita. Para ello, considerar el siguiente ejemplo. Sea X un conjunto no-enumerable, $\mathcal{A} = \{EX :\ E\text{es enumerable ó } X - E \text{ es enumerable}\}$, y μ la medida de conteo. Además, sea

$$\nu(E) = \begin{cases} 0, & E \text{ es enumerable;} \\ +\infty, & E \text{ no es enumerable.} \end{cases}$$

7. Sean $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ medidas σ-finitas sobre un espacio mesurable $(X, \mathcal{A})$. Pruebe que:

   i) i) Si $\nu_1 \ll \mu_1$ y $\nu_2 \ll \mu_2$, entonces $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ y

   $$\frac{d\nu_1 \times \nu_2}{d\mu_1 \times \nu_2}(x, y) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \times \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y).$$

   ii) Si $\nu_1 \perp \mu_1$ y $\nu_2 \perp \mu_2$, entonces $\nu_1 \times \nu_2 \perp \mu_1 \times \mu_2$.

8. Mostrar que, con las hipótesis adecuadas, valen:

   1) Si $\nu_1 \ll \mu$ y $\nu_2 \ll \mu$, entonces

   $$\nu_1 \pm \mu_2 \ll \mu \qquad \text{y} \qquad \frac{d(\nu_1 \pm \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} \pm \frac{d\nu_2}{d\mu}.$$

   2) Si $\rho \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$, entonces

   $$\rho \ll \mu \qquad \text{y} \qquad \frac{d\rho}{d\mu} = \frac{d\rho}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\mu}.$$

   3) Si ν y μ son **equivalentes** (esto es, $\nu \ll \mu$ y $\mu \ll \nu$), entonces

   $$\nu\big(\{\mathbf{x} \in X : \tfrac{\partial \nu}{\partial \mu} = 0\}\big) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{d\mu}{d\nu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^{-1}.$$
