Teoría de la Medida e Integración 2023

Lista 5

23.abril.2023

1. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Adaptar la prueba del Teorema de Convergencia Dominada para mostrar que cualquier secuencia de funciones mesurables $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$, con $f_n \to f$, y $|f_n| \leq g$ para toda $n \geq 1$, con $g \geq 0$ y $g^p \in L^1(\mu)$, entonces
$$\lim_{n\to\infty} \int \left|f_n - f\right|^p d\mu = 0.$$

2. Considere el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda^1)$. Hallar una secuencia de funciones integrables $\{f_n\}_{n\geq 1}$, con $f_n(x) \to f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y una función integrable f, tales que
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx \neq \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx.$$
¿Contradice esto el Teorema de Convergencia Limitada? Explique.

3. Probar el **Lema de Fatou para medidas**: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida y sea $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ una secuencia de conjuntos mesurables. Definiendo
$$\liminf_{n\to\infty} An = \bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{n\geq k} A_n \qquad \text{y} \qquad \limsup_{n\to\infty} An = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} A_n.$$
   i) Mostrar que $\mathbf{1}_{\liminf_n A_n} = \liminf_n \mathbf{1}_{A_n}$ y $\mathbf{1}_{\limsup_n A_n} = \limsup_n \mathbf{1}_{A_n}$.
   ii) Probar que $\mu\big(\liminf_n A_n\big) \leq \liminf_n \mu(A_n)$.
   iii) Compruebe que $\limsup_n \mu(A_n) \leq \mu\big(\limsup_n A_n\big)$, si μ es una medida finita.
   iv) Dé un ejemplo donde (iii) es falso si la medida μ no es finita.

4. **La Función Gamma de Euler**. Probar que la función Gamma
$$\Gamma(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-}x\, x^{t-1}\, dx, \quad t > 0,$$
es k veces diferenciable (para todo $k \geq 1$) y
$$\Gamma^{(k)}(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-}x\, x^{t-1}\, (\log x)^k\, dx.$$

5. **Función Generadora de Momentos**. Sea X una variable aleatoria positiva en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La función
$$\phi_X(t) = \int_\Omega e^{tX}\, d\mathbb{P}$$
se denomina **función generadora de momentos**. Pruebe que ϕ_X es k-veces diferenciable en $t = 0^+$ si el k-ésimo momento absoluto
$$\int_\Omega |X|^k\, d\mathbb{P}$$
existe.

6. **Desigualdad de Tchebyshev**. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilildad, $X : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria, y sea $\alpha > 0$. Mostrar la Desigualdad de Tchebyshev
$$\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geq \alpha\sqrt{\mathbb{V}(X)}\Big) \leq \frac{1}{\alpha^2},$$
donde
$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X \, d\mathbb{P} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{V}(X) = \int_\Omega \big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 \, d\mathbb{P}.$$
(Sugerencia: Ver ejercico 11.3 Schilling).

7. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, y $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Mostrar que la función $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, dada por
$$A \longmapsto \nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int f \cdot \mathbf{1}_A \, d\mu$$
es una medida en $\mathcal{A}$.

   Esta medida se llama la **medida con función de densidad** f **con respecto** de μ, y se denota por $\nu = f\mu$ ó $d\nu = f\, d\mu$.
