Teoría de la Medida e Integración 2023

Lista 4

20.marzo.2023

1. **La Medida de Stieltjes**. Sea μ una medida en $(\mathbb{R};\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que $\mu[-n,n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Muestre que la función

$$F_\mu(x) = \begin{cases} \mu[0,x), & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -\mu[x,0), & x < 0. \end{cases}$$

es una función monótona continua por la izquierda $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(Recordemos que las funciones monótonas crecientes y continuas por la izquierda se llaman funciones de Stieltjes).

   i) Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Stieltjes. Mostrar que

   $$\nu_F([a,b)) = F(b) - F(a), \qquad \text{para } a, b \in \mathbb{R},\ a < b,$$

   posee una única extensión a una medida sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   ii) Concluya que para toda medida μ en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, con $\mu[-r,r) < \infty$, $r > 0$, existe una función de Stieltjes $F = F_\mu$, tal que $\mu = \nu_F$.

   iii) ¿Cuál es la función de Stieltjes F que corresponde a la medida de Lebesgue 1-dimensional λ?

   iv) ¿Cuál es la función de Stieltjes F que corresponde a la medida de Dirac δ_0?

   v) Mostrar que F_μ es continua en $x \in \mathbb{R}$ si, y sólo si, $\mu(\{x\}) = 0$.

2. Sea μ^* una medida exterior en X, y sea $\{A_k\}_{k\geq 1}$ una secuencia de conjuntos disjuntos a pares, μ^*-mesurables, esto es $A_k \in \mathcal{A}$, $\forall k \geq 1$. Probar que

$$\mu^*\Big(Q \cap \bigcup_{k\geq 1} A_k\Big) = \sum_{k\geq 1} \mu^*(Q \cap A_k).$$

3. **Lema de Borel–Cantelli**. Probar el siguiente teorema:
Teorema (Borel–Cantelli). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Para cada secuencia de eventos $\{A_k\}_{k\geq 1}$ en $\mathcal{F}$, vale

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(A_k) < 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k\Big) = 0.$$

[Sugerencia: usar la Proposición 4.3(vii) y el hecho que $\mathbb{P}$ es subaditiva.
Para la recíproca del Teorema de Borel Cantelli, leer el Teorema 24.9 (Schilling).

4. Sea μ una medida en $\mathcal{A} = \{\varnothing,\ [0,1),\ [1,2),\ [0,2)\}$, $X = [0,2)$, tal que $\mu([0,1)) = \frac{1}{2}$, $\mu([1,2)) = \frac{1}{2}$ y $\mu([0,2)) = 1$. Denotemos por μ^* y por $\mathcal{A}^*$ la medida exterior y la σ-álgebra que aparecen en la prueba del Teorema de Carathéodory.

   - Hallar $\mu^*(a,b)$ y $\mu^*\{a\}$ para todo $0 \leq a < b < 2$, si usamos $\mathcal{S} = \mathcal{A}$.
   - Mostrar que $(0,1)$ y $\{0\}$ no están en $\mathcal{A}^*$.

5. Mostrar que las siguientes cuatro condiciones son equivalentes: $u : X \to \mathbb{R}$ es mesurable si, y sólo si,

i) $\{u \geq a :\} \in \mathcal{A}$, para todo $a \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{Q}$,

ii) $\{u > a :\} \in \mathcal{A}$, para todo $a \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{Q}$,

iii) $\{u \leq a :\} \in \mathcal{A}$, para todo $a \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{Q}$,

iv) $\{u < a :\} \in \mathcal{A}$, para todo $a \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{Q}$.

6. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable. Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones mesurables. Mostrar que para todo $A \in \mathcal{A}$, la función $h : X \to \mathbb{R}$ dada por
$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A; \\ g(x), & x \notin A. \end{cases}$$
es mesurable.

7. **Gluing Lemma.** Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable. Sea $\{f_k\}_{k\geq 1}$ una secuencia de funciones mesurables, y sean $\{A_k\}_{k\geq 1}$ una secuencia de conjuntos mesurables en $\mathcal{A}$, con $X = \bigcup_k A_k$. Suponga que
$$f_n\big|_{A_n \cap A_k} = f_k\big|_{A_n \cap A_k}, \quad \text{para todo } k, n \in \mathbb{N}.$$
Si definimos $f : X \to \mathbb{R}$ por $f(x) = f_k(x)$, si $x \in A_k$, mostrar que f es mesurable.

8. Probar que $f \in \mathcal{E}$ implica que $f^+, f^- \in \mathcal{E}$. ¿Es la recíproca cierta?

9. Comprobar que para toda función $u : X \to \mathbb{R}$, vale $u = u^+ - u^-$ y $|u| = u^+ + u^-$.

10. Sea $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $Q : E \to \mathbb{R}$, dada por $Q(x) = x^2$, y sea $\lambda_E = \lambda(E \cap \cdot)$ (la medida de Lebesgue en E).

    i) Mostrar que Q es $\mathcal{B}(E)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable.

    ii) Hallar $\nu \circ Q^{-1}$ si para $E = [0, 1]$, $\nu = \lambda_E$ y para $E = [-1, 1]$ y $\nu = \frac{1}{2}\lambda_E$.