Teoría de la Medida e Integración 2023

Lista 3

27.febrero.2023

1. (a) ¿Cuál es la σ-álgebra de $\mathbb{R}$ generada por los subconjuntos unitarios $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$?
   (b) Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable. Demuestre que no puede haber una σ-álgebra $\mathcal{A}$ que contiene una cantidad infinita enumerable de miembros.
   (Hint: recuerde que $A \in \mathcal{A}$ es un átomo si A no contiene un subconjunto propio $\varnothing \subsetneq B \subsetneq A$, y mostrar que $\#\mathcal{A} = \#\mathbb{N}$ implica que $\mathcal{A}$ tiene una cantidad infinita enumerable de átomos.)

2. (i) Dar un ejemplo de dos σ-álgebras $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ en X cuya unión no es una σ-álgebra.
   (ii) Dar un ejemplo de una secuencia $\{\mathcal{A}_n\}_n$ estrictamente creciente de σ-álgebras en X, es decir, $\mathcal{A}_n \neq \mathcal{A}_{n+1}$, cuya unión $\mathcal{A} = \bigcup_n \mathcal{A}_n$ no es una σ-álgebra.

3. Sea X conjunto no vacío, y $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ colecciones de subconjuntos de X. Compruebe que la σ-álgebra generada satisface las siguientes propiedades:
   i) $\mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$,
   ii) si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \sigma(\mathcal{T})$,
   iii) $\sigma(\sigma(\mathcal{S})) = \sigma(\mathcal{S})$,
   iv) si $\mathcal{S}$ es una σ-álgebra, entonces $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

4. Probar el Teorema π-λ:
   Sea X un conjunto no vacío. Si $\mathcal{P}$ un π-sistema en X y $\mathcal{D}$ un λ-sistema en X, con $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{D}$. Entonces $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{D}$.

5. Diagramar una jerarquía de relaciones entre las estructuras en un conjunto X: semi-álgebras, álgebras, σ-álgebras, clases monótonas, π-sistemas, λ-sistemas.

   Para cada relación válida ($A \Rightarrow B$), probar su validez. Para cada relación no válida ($A \not\Rightarrow B$), dar un contraejemplo de una estructura que cumple A pero no B.

6. Sea $X = \mathbb{R}$. ¿Para cuáles σ-álgebras de $\mathbb{R}$, las siguientes son medidas?

$$(i) \quad \mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \varnothing; \\ 1, & A \neq \varnothing. \end{cases} \qquad (ii) \quad \mu(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ es finito;} \\ 1, & A^c \text{ es finito.} \end{cases}$$

7. (a) Encuentre un ejemplo para mostrar que la condición de finitud en las propiedad de continuidad superior ((vii) en las propiedades de medida) es esencial: $B_n \searrow B$ y $\mu(B_1) < \infty \;\Rightarrow\; \mu(B) = \lim_n \mu(B_n)$.
   (b) Hallar una medida μ en $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ que sea σ-finita, pero que asigne a cada intervalo $[a, b)$, con $b - a > 2$, una masa finita.

8. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, y sea $F \in \mathcal{A}$. Muestre que la función $\mu_F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ dada por $\mu_F(A) = \mu(A \cap F)$ define una medida en $\mathcal{A}$. μ_F se llama la **medida relativa** de μ respecto de F.

9. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y sea $\{A_n\}_{n \geq 1}$ una secuencia de conjuntos tales que $\mathbb{P}(A_n) = 1$, para todo $n \geq 1$. Pruebe que
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_n A_n \Big) = 1.$$

10. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita, y sean $\{A_n\}_{n \geq 1}$, $\{B_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ secuencias tales que $B_n \subseteq A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que
$$\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Big) - \mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \Big) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n - B_n).$$

11. Considere el espacio mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Determine todos los conjuntos de medida nula en la medida $\delta_{\mathbf{a}} + \delta_{\mathbf{b}}$, con $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$.

12. Sea $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad discreta. Muestre que, como se vio en el aula, la definición de $\mathbb{P}$ como
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in A} p_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \, \mathbf{1}_A(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \, \delta_n(A),$$
define una medida de probabilidad.
