Teoría de la Medida e Integración 2023

Lista 2

13.febrero.2023

1. Sea $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ una secuencia de conjuntos Lebesgue mesurables. Mostrar que:
   a) Si $E_k \nearrow E$, entonces $\lim_{k\to\infty} |E_k| = |E|$.
   b) Si $E_k \searrow E$, y $|E_k| < \infty$, para todo k, entonces $\lim_{k\to\infty} |E_k| = |E|$.
   Dar un ejemplo, para mostrar que la hipótesis $|E_k| < \infty$ es indispensable.

2. Sea $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ una secuencia de conjuntos mesurables, tales que $\sum_k |E_k|_e < \infty$. Entonces, $\limsup E_k$ (y también $\liminf E_k$) tienen medida cero.

3. (a) Construir un subconjunto del intervalo $[0,1]$ usando la misma estrategia que el conjunto de Cantor, excepto que en el k-ésimo paso, cada intervalo removido tiene longitud $\frac{\delta}{3^k}$, con $0 < \delta < 1$. Mostrar que el conjunto resultante es mesurable, y que posee medida de Lebesgue $1 - \delta$.
   (b) Construir un subconjunto del intervalo $[0,1]$ al estilo Cantor, pero removiendo en el k-ésimo paso un subintervalo de longitud θ_k, con $0 < \theta_k < 1$. Mostrar que el conjunto remanente posee medida cero si, y sólo si,
   $$\sum_{k\geq 1} \theta_k = \infty.$$

4. Pruebe que si E_1 y E_2 son subconjuntos Lebesgue mesurables en $\mathbb{R}$, entonces el producto $E_1 \times E_2$ es Lebesgue mesurable en $\mathbb{R}^2$, y que
   $$|E_1 \times E_2| = |E_1| \cdot |E_2|.$$
   (Aquí interpretamos $0 \cdot \infty$ como 0.)

5. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos la **medida interior** de Lebesgue de E, como $|E|_i = sup|F|$, donde el supremo se toma sobre todos los subconjuntos cerrados $F \subseteq E$. Mostrar que
   i) $|E|_i \leq |E|_e$,
   ii) Si $|E|_e < \infty$, entonces E es Lebesgue measurable si, y sólo si, $|E|_i = |E|_e$.

6. Dar un ejemplo para mostrar que la imagen de un conjunto Lebesgue mesurable, por una función continua, no necesariamente es Lebesgue mesurable.
   (Hint: Considere la función de Cantor–Lebesgue).

7. (a) ¿ Cuál es la σ-álgebra de $\mathbb{R}^n$ generada por los subconjuntos unitarios $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$?
   (b) Sea X un conjunto infinito. Demuestre que no puede haber una σ-álgebra $\mathcal{A}$ en X que contiene una cantidad infinita enumerable de miembros.
   (Hint: recuerde que $A \in \mathcal{A}$ es un **átomo** si A no contiene un subconjunto propio $\varnothing \neq B \in \mathcal{A}$, y mostrar que $\#\mathcal{A} = \#\mathbb{N}$ implica que $\mathcal{A}$ tiene una cantidad infinita enumerable de átomos.)

8. a) Dar un ejemplo de dos σ-álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ cuya unión no es una σ-álgebra.
   b) Proporcione un ejemplo de una secuencia $\{\mathcal{A}_k\}_{k\geq 1}$ estrictamente creciente de σ-álgebras,

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3 \subset \dots$$

   cuya unión no es una σ-álgebra.

9. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación Lipschitz, con constante de Lipschitz $C > 0$, esto es

$$||T\mathbf{x} - T\mathbf{y}|| \leq C||\mathbf{x} - \mathbf{y}||, \quad \text{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Mostrar que existe una otra constante $\widetilde{C} > 0$ tal que para todo intervalo n-dimensional

$$|TI| \leq \widetilde{C}\,|I|.$$

10. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal, con representación matricial $T = (t_{ij})$.
   i) Mostrar que

$$||T\mathbf{x} - T\mathbf{y}|| \leq ||T||_F||\mathbf{x} - \mathbf{y}||, \quad \text{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

   donde $||T||_F = \big(\sum_{i,j} t_{ij}^2\big)^{1/2}$ es la norma de Frobenius (norma de Hilbert-Schmidt o norma de Schur) de T.
   ii) Mostrar que para cualquier subconjutno mesurable $E \subseteq \mathbb{R}^n$ vale

$$|TE| = \delta\,|E|, \quad \text{donde } \delta = |\det E|.$$
