Teoría de la Medida e Integración 2023

Lista 1

25.enero.2023

1. Mostrar que la función $f(x) = \lfloor x \rfloor$, no es Riemann-Stieltjes integrable respecto de ella misma, en el intervalo $[0, 3]$.

2. Sean $f, g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones limitadas. Suponga que f es g_1-integrable en $[a, b]$. Probar que si g_2 es tal que $g_1(x) = g_2(x)$, para todo $x \in [a, b]$, excepto en un número finito de puntos; entonces, f es también g_2 integrable en $[a, b]$ y
$$\int_a^b f\, dg_1 = \int_a^b f\, dg_2.$$

3. Verifique que la función $f \to V_f[a, b]$ no define una norma para el espacio $BV(a, b)$. Sin embargo, el mapa
$$||f||_{BV} = |f(a)| + V_f[a, b],$$
sí es norma en $BV(a, b)$.

4. a) Mostrar que la función dada por $f(0) = 0$, y $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ es continua en $[0, 1]$, pero no es de variación limitada.
   b) Mostrar que la función dada por $f(0) = 0$, y $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ es continua en $[0, 1]$ y sí posee variación limitada.
   c) (No entregar). En general, $f(x) = x^a \sin(\frac{1}{x^b})$ es de variación limitada en $[0, 1]$, si $a > b > 0$, pero no tiene variación limitada cuando $0 < a \leq b$.

5. Compruebe que si $f \in BV(a, b)$ y $a \leq c \leq b$ es cualquier punto intermedio, entonces las restricciones de f, $f|_{[a,c]}$ y $f|_{[c,b]}$ son ambas de variación limitada, y vale
$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

6. Pruebe que si f es de variación limitada en $[a, b]$, entonces $f = g - h$ puede representarse como la diferencia de dos funciones no-decrecientes g, h, definidas en $[a, b]$.
   (Sugerencia: considerar $g(x) = V_a^x(f)$).

7. Evaluar las siguientes integrales de Riemann-Stieltjes:
$$(a) \quad \int_{-2}^{2} x\, d\lfloor x \rfloor, \qquad (b) \quad \int_0^4 x^2\, d\lfloor x^2 \rfloor, \qquad (c) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, d(|\sin x|).$$

8. Probar el **Teorema de Convergencia Monótona** para Riemann-Stieltjes.
   Sea $\{f_n\}$ una secuencia monótona de funciones integrables con respecto de una función creciente g en $[a, b]$. Si la función $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ es integrable con respecto de g en $[a, b]$, entonces
$$\int_a^b f\, dg = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\, dg.$$
