# Teoría de la Medida e Integración 2023

Ejercicios en Grupos

01.marzo.2023

Para cada una de las siguientes funciones $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, determinar si $\mu$ es una medida en el espacio indicado. (En caso afirmativo, probarlo. En caso contrario, argumentar por qué no es medida).

1. Sea $X$ conjunto no vacío, $\mathcal{A}$ una $\sigma$-álgebra en $X$, y sea $\mathbf{x} \in X$ un punto (fijo). Definimos $\mu_{\mathbf{x}} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ como
$$\mu_{\mathbf{x}}(A) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \notin A; \\ 1, & \mathbf{x} \in A. \end{cases}$$

2. Sea $X$ conjunto no vacío, $\mathcal{A}$ una $\sigma$-álgebra en $X$, y sea $B \subset X$ un subconjunto (fijo). Definimos $\mu_B : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ como
$$\mu_B(A) = \begin{cases} 0, & A \cap B = \varnothing; \\ 1, & A \cap B \neq \varnothing. \end{cases}$$

3. Sea $X$ conjunto no vacío, $\mathcal{A}$ una $\sigma$-álgebra en $X$, y sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ dos puntos (fijos), con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Definimos $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ por
$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x}, \mathbf{y} \notin A; \\ 5, & \mathbf{x} \in A,\ \mathbf{y} \notin A; \\ 7, & \mathbf{x} \notin A,\ \mathbf{y} \in A; \\ 12, & \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A. \end{cases}$$

4. Sea $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Definimos $\mu$ sobre los intervalos semi-abiertos $\mathcal{J}$ de $\mathbb{R}$ como
$$\mu\big([a,b)\big) = b - a.$$

5. Sea $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona no-decreciente. Definimos $\mu_f$ sobre los intervalos semi-abiertos $\mathcal{J}$ de $\mathbb{R}$ como
$$\mu_f\big([a,b)\big) = f(b) - f(a).$$

6. Sea $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, con la propiedad $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = K < \infty$. Definimos $\mu_f$ sobre los intervalos semi-abiertos $\mathcal{J}$ de $\mathbb{R}$ como
$$\mu_f\big([a,b)\big) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

7. Sea $X = \mathbb{Z}^+$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)$, y sea $0 < \alpha < 1$. Definimos $\mu_\alpha$ sobre los conjuntos unitarios $\{k\}$ como
$$\mu_\alpha(k) = \alpha(1-\alpha)^{k-1}.$$

8. Sea $X = [0,\infty)$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,\infty))$. Definimos $\mu$ sobre los conjuntos los intervalos de la forma $[0,x)$, $x \geq 0$, mediante
$$\mu\big([0,x)\big) = 1 - e^{-x}.$$

9. Sea $S = \mathbb{Z}^+$, $X = S \times \{0,1\}$, y $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Definimos $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ por
$$\mu(A) = \sum_{(n,t) \in A} 2^{-n}.$$

10. Sea $S = \mathbb{Z}^+$, $X = S \times \{0,1\}$, y $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Para cada $A \in \mathcal{A}$, sea $\pi_1(A) = \{n :\ (n,t) \in A\}$ la proyección en la primera componente. Definimos $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ por
$$\mu(A) = \sum_{n \in \pi_1(A)} 2^{-n}.$$