El Teorema de Radon-Nikodym

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 28) 15.mayo.2023

Definición

*Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable y sean $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ medidas positivas. Diremos que μ_1 y μ_2 son **mutuamente singulares** si existen conjuntos mesurable y complementarios $A, B \in \mathcal{A}$ con $X = A \mathbin{\dot\cup} B$, y tales que $\mu_1(A) = 0 = \mu_2(B)$.*
*Para medidas con signo, ν_1 y ν_2 son **mutuamente singulares** si $|\nu_1|$ y $|\nu_2|$ son mutuamente singulares.*

Notación: $\mu_1 \perp \mu_2$.

Definición

*Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable y sean $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ medidas positivas. Diremos que μ_2 es **absolutamente continua** respecto de μ_1 si $\mu_1(E) = 0 \;\Rightarrow\; \mu_2(E) = 0$.*
*Para medidas con signo, ν_2 es **absolutamente continua** respecto de ν_1 si ν_2 es absolutamente continua respecto de $|\nu_1|$.*

Notación: $\mu_1 \ll \mu_2$.

Proposición

Sean $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable, y sean $\nu, \nu_1, \nu_2 : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ medidas con signo. Entonces

a) $\nu_1 \perp \nu_2 \;\Rightarrow\; \nu_2 \perp \nu_1$.

b) $\nu_1 \perp \nu$ y $\nu_2 \perp \nu \;\Rightarrow\; \nu_1 + \nu_2 \perp \nu$.

c) $\nu_2 \ll \nu_1 \;\Leftrightarrow\; |\nu_2| \ll \nu_1 \;\Leftrightarrow\; |\nu_2| \ll |\nu_1| \;\Leftrightarrow\; \nu_2^+, \nu_2^- \ll \nu_1$.

d) *Si* $\nu_2 \ll \nu$ y $\nu \perp \nu_1 \;\Rightarrow\; \nu_2 \perp \nu_1$.

e) *Si* $\nu_1 \ll \nu$ y $\nu_1 \perp \nu$, *entonces* $\nu_1 \equiv 0$.

Prueba: Ejercicio!

Ejemplo

Ejemplo: Sean $X = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1])$, y consideremos las medidas $\mu = \lambda^1$, y la medida $\nu = \delta_{1/2}$ concentrada en $\mathbf{x} = \frac{1}{2}$.

Recordemos que $\delta_{1/2}(E) = \begin{cases} 0, & \frac{1}{2} \notin E; \\ 1, & \frac{1}{2} \in E. \end{cases} \qquad E \in \mathcal{A}.$

Tomando $A = \{\frac{1}{2}\}$ y $B = [0, 1] - \{\frac{1}{2}\}$, tenemos que

$$\mu(A) = \lambda^1(A) = 0, \qquad \text{y} \qquad \nu(B) = \delta_{1/2}(B) = 0.$$

Entonces, $\mu \perp \nu$.

Ejemplo

Ejemplo: Si tenemos una medida positiva μ definida en $(X, \mathcal{A})$ y una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ positiva y μ-integrable, definiendo

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

obtenemos una medida ν en la misma σ-álgebra $\mathcal{A}$. Observe que

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \leq \int_A \sup_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) \, d\mu = \sup_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) \int_A d\mu = \sup_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) \cdot \mu(A).$$

Luego,si $\mu(A) = 0$, entonces $\nu(A) = 0$, de modo que $\nu \ll \mu$.

Este ejemplo es muy importante. Bajo condiciones muy generales el recíproco también es cierto. En consecuencia este es el único método de generar medidas con signo absolutamente eontinuas con respecto a una medida dada: Teorema de L. J. Radón y O. Nikodym (1930).

Lema

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio de medida y $\nu, \mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ medidas finitas tales que $\nu \ll \mu$, con $\nu \neq 0$. Entonces, existen $\varepsilon > 0$ y $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A) > 0$, tales que con A es positivo para la medida con signo $\nu - \varepsilon\mu$.

Prueba: Para cada $n \geq 1$, sea $(A_n \mid B_n)$ una descomposición de Hahn para la medida $\nu - \frac{1}{n}\mu$. Considere $A_0 = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ y $B_0 = \bigcap_{n\geq 1} B_n$.

Como $B_0 \subseteq B_n$, entonces B es negativo para $\nu\frac{1}{n}\mu$, $\forall n \geq 1$. Luego

$$0 \leq \nu(B_0) \leq \frac{1}{n}\,\mu(B_0), \;\; \forall n \geq 1.$$

Esto muestra que $\nu(B_0) = 0$, y portanto $\nu(A_0) > 0$ (ya que $\nu \neq 0$). Como $\nu \ll \mu$, entonces $\mu(A_0) > 0$. Así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_{n_0}) > 0$.
Tomamos $\varepsilon = \frac{1}{n_0}$ y $A = A_{n_0}$. $\square$

Teorema (Radón-Nikodym)

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable, $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida σ-finita, y nu $: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo σ-finita, tal que $\nu \ll \mu$. Entonces, existe una función μ-mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ que satisface

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu, \qquad \textit{para todo } E \in \mathcal{A}.$$

Además, si existe otra función $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(E) = \int_E g\, d\mu$, para todo $E \in \mathcal{A}$, entonces $f = g$ μ-c.t.p.

Prueba: Caso 1: μ y ν son medidas finitas. Sean

$$\mathcal{K} = \Big\{ f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu) : \int_E f\, d\mu \leq \nu(E),\ \forall E \in \mathcal{A} \Big\}, \qquad \alpha = \sup \Big\{ \int f\, d\mu : f \in \mathcal{K} \Big\}.$$

Observe que $\alpha \leq \nu(X) < +\infty$.

El Teorema de Radón-Nikodym

Si $f_1, f_2 \in \mathcal{K}$, entonces $\max\{f_1, f_2\} \in \mathcal{K}$, pues si para $E \in \mathcal{A}$ denotamos por $E_1 = \{\mathbf{x} \in E : \ f_1(\mathbf{x}) > f_2(\mathbf{x})\}$ y $E_2 = \{\mathbf{x} \in E : \ f_1(\mathbf{x}) \leq f_2(\mathbf{x})\}$, entonces $E = E_1 \mathbin{\dot\cup} E_2$ y

$$\int_E \max\{f_1, f_2\}\, d\mu = \int_{E_1} f_1\, d\mu + \int_{E_2} f_2\, d\mu \leq \nu(E_1) + \nu(E_2) = \nu(E).$$

Sea $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una secuencia de funciones en $\mathcal{K}$, y sea $f_0 = \sup_n f_n$. Entonces, $f_0 \in \mathcal{K}$, pues si $g_n = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$, por el argumento del párrafo anterior e inducción obtenemos que $g \in \mathcal{K}$. Como $g_n \nearrow f_0$, del Teorema de Convergencia Monótona tenemos que

$$\int_E f_0\, d\mu = \lim_{n=1} \int_E g_n\, d\mu \leq \nu(E).$$

Lo anterior prueba simultáneamente $f_0 \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ y que $f_0 \in \mathcal{K}$.

Ahora hallamos una secuencia $\{f_n\}_{n\geq 1}$ tal que $\int f_n\, d\mu \to \alpha$.

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

El Teorema de Radón-Nikodym

Observe que
$$f_0 = \sup_{n\geq 1} f_n \in \mathcal{K}, \qquad \text{y} \qquad \int f_0 \, d\mu = \alpha.$$

Como $f_0 \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, es posible hallar $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ tal que f$=$ f_o μ-c.t.p. por lo que también tendremos $f \in \mathcal{K}$ y $\int f \, d\mu = \alpha$.

Se probará que $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$, para todo $E \in \mathcal{A}$ o bien que la medida $\nu_o(E) = \nu(E) - \int_E f \, d\mu$ es idénticamente cero. Si este no es el caso, se sigue del lema anterior que existen $\varepsilon > 0$ y $A \in \mathcal{A}$ tales que A es positivo para $\nu_0 - \varepsilon\mu$ y $\mu(A) > 0$, y
$$\varepsilon \, \mu(E \cap A) \leq \nu_0(E \cap A) = \nu(E \cap A) - \int_{E\cap A} f \, d\mu.$$

Sea $g = f + \varepsilon \mathbf{1}_A$. Entonces, $g \in \mathcal{K}$, ya que para todo $E \in \mathcal{A}$ vale
$$\int_E g \, d\mu = \int_f d\mu + \varepsilon \, \mu(E \cap A) \leq \int_{E-(E\cap A)} f \, d\mu + \nu(E \cap A) \leq \nu(E).$$

para todo $E \in \mathcal{A}$. Pero $\int g \, d\mu = \alpha + \varepsilon \, \mu(A) > \alpha$. Lo cual contradice la definición de α y acaba la prueba de existencia en este caso.

El Teorema de Radón-Nikodym

Si $h \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ es otra función tal que $\nu(E) = \int_E h\,d\mu$, $\forall E \in \mathcal{A}$, entonces $\int_E (f-h)\,d\mu = 0$ para todo $E \in \mathcal{A}$, y portanto, $f = h$ μ-c.t.p.

Caso 2: $\mu(X) < +\infty$ y $|\nu|(X) < +\infty$.
Por la propiedad (e), la condición $\nu \ll \mu$ equivale a la simultánea validez de $\nu^v \ll \mu$ y $\nu^- \ll \mu$. Del caso 1, existen $f_1, f_2 \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ tales que

$$\nu^+(E) = \int_E f_1\,d\mu, \qquad \nu^-(E) = \int_E f_2\,d\mu, \qquad \text{para todo } E \in \mathcal{A}.$$

De ahí, $f = f_1 - f_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ satisface las condiciones del Teorema, y es única μ-c.t.p.

Caso 3: Caso general, $\mu(X) \leq +\infty$ y $|\nu|(X) \leq +\infty$.
Hallamos una secuencia $\{A_n\}_{n\geq 1}$ de conjuntos mesurables disjuntos en $\mathcal{A}$ tales que

$$A = \dot{\bigcup_{n\geq 1}} A_n, \qquad \mu(A_n) < \infty,\ |\nu|(A_n),\ \forall n \geq 1.$$

El Teorema de Radón-Nikodym

Denotamos por $\mu_n, \nu_n^+, \nu_n^- : A_n \cap \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ a las restricciones de μ, ν^+, ν^- determinadas por A_n. Como $\nu_n^+ \ll \mu_n$ y $\nu_n^+ \ll \mu_n$, se tiene del caso 2 que existen secuencias $\{f_n^{(1)}\}_{\geq 1}$ y $\{f_n^{(2)}\}_{\geq 1}$, con $f_n^{(i)} \in \mathcal{M}^+(A_n \cap \mathcal{A})$ tales que

$$\nu_n^+(E) = \int_E f_n^{(1)}\, d\mu_n \qquad \text{y} \qquad \nu_n^-(E) = \int_E f_n^{(2)}\, d\mu_n.$$

Si $E \in A_n \cap \mathcal{A}$, definimos $f^{(i)} : X \to \mathbb{R}$ por $f^{(i)}(\mathbf{x}) = f_n^{(i)}(\mathbf{x})$ si $\mathbf{x} \in_n$. Así, $f^{(i)} \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, y si $E \in \mathcal{A}$, por el Teorema de Convergencia Monótona tenemos

$$\begin{aligned}
\nu^+(E) &= \sum_{n\geq 1} \nu^+(E \cap A_n) = \sum_{n\geq 1} \int_{E\cap A_n} f_n^{(1)}\, d\mu_n = \sum_{n\geq 1} \int_{E\cap A_n} f^{(1)}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \Big(\int_E f^{(1)}\, d\mu \Big) = \int_E f^{(1)}\, d\mu; \\
\nu^-(E) &= \sum_{n\geq 1} \nu^-(E \cap A_n) = \sum_{n\geq 1} \int_{E\cap A_n} f_n^{(2)}\, d\mu_n = \sum_{n\geq 1} \int_{E\cap A_n} f^{(2)}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \Big(\int_E f^{(2)}\, d\mu \Big) = \int_E f^{(2)}\, d\mu.
\end{aligned}$$

El Teorema de Radón-Nikodym

para todo $E \in \mathcal{A}$. Haciendo $f = f^{(1)} - f^{(2)} \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, se comprueba que f satisface las condiciones del teorema, y la unicidad μ-c.t.p. $\square$

Obs!:

- El teorema de Radón-Nikodym permanece válido aún si μ es una medida convsigno, ya que si $(A \mid B)$ es una descomposición de Hahn para μ, podemos aplicar los casos ya probados a las restricciones ν y μ^+ en A, y ν y μ^- en B.
- El teorema permanece válido si ν no es σ-finita. Sin embargo, éste falla si μ no es σ-finita aunque ν sea finita.

Existen otras pruebas del de Radón-Nikodym. Por ejemplo

- la demostración de P. von Neumann que aparece en Royden, H. L. y Fitzpatrick, P. M. (2010). *Real Analysis*, 4a ed., pp. 242-243. Esta contiene una muy buena prueba en el caso que ν no es σ-finita.
- la prueba que aparece en Stein, E. M. y Shakarchi, R. (2005). *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces*, pp. 187-189, y que es esencialmente la prueba original de O. Nikodym.

El Teorema de Radón-Nikodym

Definición

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable, $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida σ-finita y $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo σ-finita tales que $\nu \ll \mu$. La única función función $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ que satisface

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu, \qquad \textit{para todo } E \in \mathcal{A},$$

*se llama la **derivada de Radón-Nikodym** de ν con respecto de μ.*

Notación: $f = \dfrac{d\nu}{d\mu}$.

Proposición (Propiedades)

1) *Si $\nu_1 \ll \mu$ y $\nu_2 \ll \mu$, entonces*

$$\nu_1 \pm \mu_2 \ll \mu \qquad y \qquad \frac{d(\nu_1 \pm \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} \pm \frac{d\nu_2}{d\mu}.$$

2) *Si $\rho \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$, entonces*

$$\rho \ll \mu \qquad y \qquad \frac{d\rho}{d\mu} = \frac{d\rho}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\mu}.$$

3) *Si ν y μ son **equivalentes** (esto es, $\nu \ll \mu$ y $\mu \ll \nu$), entonces*

$$\nu\Big(\Big\{\mathbf{x} \in X : \tfrac{d\nu}{d\mu}(\mathbf{x}) = 0\Big\}\Big) = 0 \qquad y \qquad \frac{d\mu}{d\nu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^{-1}.$$

Teorema (Teorema de Descomposición de Lebesgue)

Sean $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable, y $\mu, \nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ dos medidas σ-finitas. Entonces, existen dos únicas medidas σ-finitas $\nu_0, \nu_1 : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ tales que

i) $\nu = \nu_0 + \nu_1$,
ii) $\nu_0 \perp \mu$ y $\nu_1 \ll \mu$.

Prueba: Pendiente.