Medidas con Signo

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 27) 10.mayo.2023

Estudiamos una generalización del concepto de medida positiva, al caso cuando la medida toma valores positivos y negativos.

Definición

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable. Una ***medida con signo*** *en $(X, \mathcal{A})$ es una función $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que:*

i) $\nu(\varnothing) = 0$,

ii) ν *es σ-aditiva,* $\nu\big(\bigcup_{k\geq 1} E_k\big) = \sum_{k\geq 1} \nu(E_k)$.

iii) ν *toma a lo sumo uno de los valores $+\infty$ ó $-\infty$.*

Obs! La igualdad en (ii) debe entenderse como sigue:

Si $\left|\nu\left(\bigcup_{k\geq 1} E_k\right)\right| < +\infty$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \nu(E_k)$ en (ii) converge absolutamente; y si $\nu\left(\bigcup_{k\geq 1} E_k\right) = \pm\infty$, entonces la serie converge (en sentido extendido) a $+\infty$ ó $-\infty$.

Diremos que ν es **finita** si $|\nu(E)| < +\infty$, para todo $A \in \mathcal{A}$.

Diremos que es σ**-finita** si existe una sucesión de elementos mesurables $\{E_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$, tal que $E_k \nearrow X$ y $|\nu(E_k)| < +\infty$, para todo $k \geq 1$.

Teorema

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable, y $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo.

i) *Si $E, F \in \mathcal{A}$ son tales que $E \subseteq F$ y $|\nu(F)| < +\infty$, entonces*

$$\nu(F - E) = \nu(F) - \nu(E).$$

ii) *Si $\{E_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ es una secuencia monótona de conjuntos mesurables ($E_n \nearrow E$ ó $E_n \searrow E$) y existe y $|\nu(E_1)| < +\infty$, entonces*

$$\nu(\lim_{n\to\infty} E_n) = \nu(E) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n).$$

Prueba: La parte (i) se sigue del hecho que ν es aditiva. Basta hacer $E_1 = E$, $E_2 = F - E$, y $E_k = \varnothing$, para $k \geq 2$. Luego,

$$\nu(F) = \nu\Big(\dot{\bigcup_{k\geq 1}} E_k\Big) = \sum_{k\geq 1} \nu(E_k) = \nu(E) + \nu(F - E).$$

Si alguno o ambos sumandos fuesen infinitos, entonces $\nu(F)$ sería infinito también, por lo que necesariamente ambos sumandos son finitos. De ahí que $\nu(F - E) = \nu(F) - \nu(E)$.

Mostramos ahora la parte (ii). Usando (i), la demostración es idéntica a las del la continuidad inferior y superior para medidas positivas, salvo que los límites no son necesariamente monótonos. Asimismo, la condición $|\nu(E_1)| < +\infty$ es sólo necesaria para el caso decreciente. $\square$

Medidas con Signo

Ejemplo 1: Sean $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ medidas positivas, con alguna de ellas μ_1 ó μ_2 finita. Entonces, la función $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$\nu(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A), \quad \text{para } A \in \mathcal{A},$$

es una medida con signo. Si ambas μ_1 y μ_2 son finitas, entonces ν es también finita.

Ejemplo 2: Sea $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida positiva, y sea $f \in L^1(X)$. Definimos $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ mediante

$$\nu(A) = \int_X f \, d\mu, \quad \text{para } A \in \mathcal{A}.$$

Entonces, ν es una medida con signo, y es finita.

Observe que si $\mu_1(A) = \int_A f^+ \, d\mu$ y $\mu_2(A) = \int_A f^- \, d\mu$, entonces μ_1 y μ_2 son medidas finitas y $\nu = \mu_1 - \mu_2$.

Teoremas de Descomposición

Probaremos que toda medida con signo es siempre la diferencia de dos medidas, con alguna de ellas finita.

Definición

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable, y $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo sobre $\mathcal{A}$.

i) *Un conjunto $A \in \mathcal{A}$ es **positivo** para ν si $\nu(E) \geq 0$, para todo $E \subseteq A$, $E \in \mathcal{A}$.*

ii) *Un conjunto $B \in \mathcal{A}$ es **negativo** para ν si $\nu(E) \leq 0$, para todo $E \subseteq B$, $E \in \mathcal{A}$.*

iii) *Un conjunto $N \in \mathcal{A}$ es **nulo** para ν si $\nu(E) = 0$, para todo $E \subseteq N$, $E \in \mathcal{A}$.*

Proposición

- *Si A es positivo para ν, entonces $\nu\big|_{\mathcal{A}\cap A} : \mathcal{A} \cap A \to \overline{\mathbb{R}}$ define una medida en $(A, \mathcal{A} \cap A)$. Análogamente, si B es positivo para ν, entonces $-\nu\big|_{\mathcal{A}\cap B} : \mathcal{A} \cap B \to \overline{\mathbb{R}}$ define una medida en $(B, \mathcal{A} \cap B)$.*

Teoremas de Descomposición

- Todo subconjunto mesurable de un conjunto positivo, negativo y nulo para ν es positivo, negativo o nulo para ν, respectivamente.
- N es nulo para $\nu \iff N$ es positivo y negativo para ν.

Ejemplo: En el ejemplo anterior, si $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida positiva, $f \in L^1(X)$, y $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ es dada por

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu, \quad \text{para } E \in \mathcal{A}.$$

Consideremos, $A = \{\mathbf{x} \in X : \ f(\mathbf{x}) \geq 0\}$, $B = \{\mathbf{x} \in X : \ f(\mathbf{x}) \leq 0\}$, $N = \{\mathbf{x} \in X : \ f(\mathbf{x}) = 0\}$. Todos son conjuntos ν-mesurables, y A es positivo, B es negativo, N es nulo.

Lema

Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable y $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo. Sea $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ una secuencia de conjuntos positivos para ν. Entonces, $A = \bigcup_n A_n$ es positivo para ν. (Análogamente para conjuntos negativos, y conjuntos nulos para ν).

Prueba: Hacemos la prueba para el caso positivo. Los otros dos casos se prueban de forma similar.
Como $A_1 \cup A_2 = (A_1 - A_2) \mathbin{\dot\cup} (A_1 \cap A_2) \mathbin{\dot\cup} (A_2 - A_1)$, y estos tres últimos subconjuntos son positivos para ν, entonces para cualquier subconjunto $E \subseteq A_1 \cup A_2$, vale

$$\nu(E) = \nu(E \cap (A_1 - A_2)) + \nu(E \cap A_1 \cap A_2) + \nu(E \cap (A_2 - A_1)) \geq 0.$$

Por inducción, se sigue que toda unión finita $C_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ es un conjunto positivo para ν. La secuencia $\{C_k\}$ es ascendente, así para $E \subseteq A$, $E \in \mathcal{A}$, tenemos que $C_k \cap E \nearrow A \cap E = E$.

Por continuidad superior, $\nu(E) = \lim_k \nu(C_k \cap E) \geq 0$. Así, A es positivo para ν. $\square$

Teorema (Teorema de Descomposición de Hahn)

Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable y $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo. Entonces, existen conjuntos mesurables $A, B \in \mathcal{A}$ (no necesariamente únicos), tales que $X = A \cup B$, A es positivo para ν, y B es negativo para ν.

Prueba: Como ν toma a lo sumo un valor extendido, podemos suponer que $-\infty < \nu \leq +\infty$.

Definamos $\beta = \inf\{\nu(B) : \ B \text{es negativo para } \nu\}$, y hallamos una secuencia $\{B_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ de conjunto negativos para los cuales

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \nu(B_n).$$

Del lema, $B = \bigcup_{n\geq 1} B_n$ es negativo para ν, y por definición de β, se tiene que $\beta \leq \nu(B)$. Por otro lado, $B_n \subseteq B$ y $B - B_n$ es negativo, así que -0.2cm

$$\nu(B) = \nu(B_n) + \nu(B - B_n) \leq \nu(B_n) \implies \nu(B) \leq \lim_{n\to\infty} \nu(B_n) = \beta.$$

Teoremas de Descomposición

Esto muestra que $\beta = \nu(B) \in (-\infty, 0]$.

Sea $A = X - B$. Basta mostrar que A es positivo para ν. Supongamos que no lo es. Entonces, existe un subconjunto mesurable $E_0 \subseteq A$, $E_0 \in \mathcal{A}$ tal que $\nu(E_0) < 0$.

E_0 no puede ser negativo para ν, pues si lo fuera entonces $B \cup E_0$ sería negativo y $\nu(B \,\dot\cup\, E_0) = \beta + \nu(E_0) < \beta$, contrario a la definición de β. Así, E_0 contiene un subconjunto mesurable de medida positiva. Sea $k_1 \in \mathbb{N}$ el menor natural tal que E_0 contiene un subconjunto $E_1 \in \mathcal{A}$ con $\nu(E_1) \geq \frac{1}{k_1}$.

Como $|\nu(E_0)| = -\nu(E_0) < +\infty$ y $E_1 \subset E_0$, se tiene que $\nu(E_1) < +\infty$, y por sustractividad

$$\nu(E_0 - E_1) = \nu(E_0) - \nu(E_1) \leq \nu(E_0) - \frac{1}{k_1} < 0.$$

Repitiendo el argumento usado para E_0, ahora para $E_0 - E_1$ concluimos que $E_0 - E_1$ no puede ser negativo para ν y definimos k_2 como el menor natural tal que $E_0 - E_1$ contiene un subconjunto $E_2 \in \mathcal{A}$ con $\nu(E_2) \geq \frac{1}{k_2}$.

Teoremas de Descomposición

De manera inductiva, hallamos subconjuntos disjuntos $E_1, E_2, \ldots E_n \in \mathcal{A}$ contenidos en E_0 tales que

$$\nu(E_j) \geq \tfrac{1}{k_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

con k_j el menor natural tal que $E_0 - \bigcup_{t=1}^{j} E_t$ contiene algún subconjunto de medida $\geq \frac{1}{k_j}$.

Por σ-aditividad

$$\sum_{j\geq 1} \frac{1}{k_j} \leq \sum_{j\geq 1} \nu(E_j) = \nu\Big(\dot{\bigcup_{j\geq 1}} E_j\Big) < +\infty.$$

((pues $\bigcup_j E_j \subseteq E_0$ y $|\nu(E_0E)| < +\infty$), por lo que necesariamente $k_j \to \infty$, cuando $j \to \infty$.

Sea $F_0 = E_0 - \bigcup_{j\geq 1} E_j$. Entonces, si $F \subseteq F_0$, con $F_0 \in \mathcal{A}$, se tiene que $\nu(F) \leq 0$, pues $\nu(F) > 0$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\nu(F) \geq \frac{1}{\ell}$ y como $F \subseteq E_0 - \bigcup_{j\geq 1} E_j$, se sigue de la definición de k_j, que $k_j \leq \ell$, $\forall j$, lo cual no es posible, con lo que se prueba que F_0 es negativo para ν y ajeno a B, asi que, $B \cup F_0$ es negativo para ν y $\nu(B \cup F_0) < \beta$, contradiciendo la definición de β. Portanto, A es positivo para ν. $\square$

Teoremas de Descomposición

La descomposición $X = A \cup B$ se llama una **descomposición de Hahn** para ν, y se denota por $(A \mid B)$.

Teorema

Sean $(A_1 \mid B_1)$ y $(A_2 \mid B_2)$ descomposiciones de Hahn para ν. Entonces, éstas son ν-esencialmente iguales en el sentido que $A_1 \triangle A_2$ y $B_1 \triangle B_2$. son ν-nulos.

Prueba: Sea $E \subseteq A_1 \triangle A_2$, $E \in \mathcal{A}$. Entonces

$$\nu(E) = \nu(E \cap (A_1 - A_2)) + \nu(E \cap (A_2 - A_1)).$$

Como $E \cap (A_1 - A_2) \subseteq A_1$ y $E \cap (A_2 - A_1) \subseteq A_2$, se sigue que $\nu(E) \geq 0$.

Por otro lado, como $E \cap (A_1 - A_2) \subseteq B_2$ y $E \cap (A_2 - A_1) \subseteq B_1$, se sigue que $\nu(E) \neq 0$.

Esto muestra que $\nu(E) = 0$, y portanto, $A_1 \triangle A_2$ es nulo para ν. Similar para $B_1 \triangle B_2$. $\square$

Dada una medida con signo ν, es posible construir a partir de cualquier descomposición de Hahn $(A \mid B)$ para ν, dos medidas ν^+ y ν^- (alguna de ellas finita), tales que $\nu = \nu^+ + \nu^-$.

Teorema (Teorema de Descomposición de Jordan)

Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable y $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo. Entonces, existen dos medidas $\nu^+, \nu^- : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, positivas, alguna de ellas finita, tales que $\nu = \nu^+ + \nu^-$.
*ν^+ y ν^- se llaman la **variación positiva** y la **variación negativa** de ν, respectivamente.*

Prueba: Sea $(A \mid B)$ una descomposición de Hahn para ν. Definimos $\nu^+, \nu^- : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ por

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A), \qquad \nu^-(E) = -\nu(E \cap B), \qquad \text{para } E \in \mathcal{A}.$$

Como A es positivo para ν y B es negativo para ν, entonces ν^+, ν^- son funciones no-negativas, $\nu^+(\varnothing) = \nu^-(\varnothing) = 0$ y ν^+, ν^- son σ-aditivas, por ser contracciones de ν. Portanto, ν^+, ν^- son medidas positivas sobre $\mathcal{A}$.

Teoremas de Descomposición

Sea $E \in \mathcal{A}$ arbitrario. Entonces
$$\nu(E) = \nu(E \cap X) + \nu(E \cap (A \cup B)) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap B) = \nu^+(E) - \nu^-(E).$$

En el caso $\nu(E) = +\infty$, entonces $\nu(E \cap B) > -\infty$, y $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = +\infty$, ν^- es finita. Análogamente, si $\nu(E) = -\infty$, entonces $\nu^-(E) = +\infty$ y ν^+ es finita. $\square$

Obs! La descomposición de Jordan $\nu = \nu^+ - \nu^-$, independe de la descomposición de Hahn para ν.

Definición

*ea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable y $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo, entonces la medida $\nu^+ + \nu^- : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ se llama la **variación total** de ν, y se denota por $|\nu|$.*

Algunas propiedades de las medidas ν^+, ν^- y $|\nu|$, asociadas a la medida con signo ν son:

- $-\nu^-(E) \leq \nu(E) \leq \nu^+(E)$, $\forall E \in \mathcal{A}$.
- $\big|\nu(E)\big| \leq |\nu|(E)$, $\forall E \in \mathcal{A}$.
- $N \in \mathcal{A}$ es nulo para ν, si y sólo si, $|\nu|(N) = 0$.

Ejemplo

Ejemplo: En el ejemplo anterior, donde $\nu(E) = \displaystyle\int_E f\, d\mu$, tenemos:

$$A = \{\mathbf{x} \in X :\ (\mathbf{x}) \geq 0\}, \qquad B = \{\mathbf{x} \in X :\ f(\mathbf{x}) < 0\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \nu^+(E) &= \int_E f^+\, d\mu, \\ \nu^-(E) &= \int_E f^-\, d\mu, \\ |\nu|(E) &= \int_E |f|\, d\mu. \end{aligned}$$

para todo $E \in \mathcal{A}$.