Teoremas de Tonelli y Fubini

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 26) 08.mayo.2023

Medidas Producto

Lema

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos. Si $E = A \times B$, con $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, entonces las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : Y \to \mathbb{R}$, definidas por

$$f(\mathbf{x}) = \nu(E_{\mathbf{x}}) \ \ y \ \ g(\mathbf{y}) = \mu(E^{\mathbf{y}}),$$

son mesurables, y

$$\int_X f \, d\mu = \int_{X \times Y} \mathbf{1}_E \, d\pi = \int_Y g \, d\nu.$$

Teorema (Teorema de Tonelli)

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *espacio de medida* σ*-finitos, y sea* $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ *una función mesurable no-negativa. Entonces, las funciones* $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$f(\mathbf{x}) = \int_Y F_{\mathbf{x}}\, d\nu, \qquad g(\mathbf{y}) = \int_X F^{\mathbf{y}}\, d\mu,$$

son mesurables y

$$\int_X f\, d\mu = \int_{X\times Y} F\, d\pi = \int_Y g\, d\nu.$$

En otras palabras

$$\int_X \left(\int_Y F\, d\nu \right) d\mu = \iint_{X\times Y} F\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X F\, d\mu \right) d\nu.$$

Prueba: Si $F = \mathbf{1}_E$, con $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, el Teorema de Tonelli se reduce al lema anterior

Teorema de Tonelli

pues

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \int_Y F_{\mathbf{x}}\, d\nu = \int_Y (\mathbf{1}_E)_{\mathbf{x}}\, d\nu = \int_Y \mathbf{1}_{E_{\mathbf{x}}}\, d\nu = \nu(E_{\mathbf{x}}) = \mathbf{1}_A(\mathbf{x})\, \nu(B), \\ g(\mathbf{y}) &= \int_X F^{\mathbf{y}}\, d\mu = \int_X (\mathbf{1}_E)^{\mathbf{y}}\, d\mu = \int_X \mathbf{1}_{E^{\mathbf{y}}}\, d\mu = \mu(E^{\mathbf{y}}) = \mu(A)\, \mathbf{1}_B(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

y

$$\int_X f\, d\mu = \int_X \mathbf{1}_A(\mathbf{x})\, \nu(B)\, d\mu = \mu(A)\, \nu(B) = \int_Y \mu(A)\, \mathbf{1}_B(\mathbf{y})\, d\nu = \int_Y g\, d\nu. \tag{1}$$

Si F es una función simple, con representación estándar $F = \sum_{k=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{E_j}$, entonces (2) vale por linealidad.

Finalmente, si F es mesurable y no-negativa, por el Lema del Sombrero, existe una secuencia de funciones simples $\{F_n\}_{n\geq 1}$ tales que $F_n \nearrow F$. Definimos

$$\varphi_n(\mathbf{x}) = \int_Y (F_n)_{\mathbf{x}}\, d\nu, \qquad \psi_n(\mathbf{y}) = \int_X (F_n)^{\mathbf{y}}\, d\mu.$$

Teorema de Tonelli

Por el Teorema de Convergencia Monótona,

$$\varphi_n = \int_Y (F_n)_{\mathbf{x}}\, d\nu \nearrow \int_Y F_{\mathbf{x}}\, d\nu = f, \qquad \psi_n = \int_X (F_n)^{\mathbf{y}}\, d\mu \nearrow \int_X F^{\mathbf{y}}\, d\mu = g.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_X f\, d\mu &= \int_X \lim_n \varphi_n\, d\mu = \lim_n \int_X \varphi_n\, d\mu \\ &= \lim_n \int_Y \psi_n\, d\nu = \lim_n \int_Y \psi_n\, d\nu = \int_Y g\, d\nu. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema (Teorema de Fubini)

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacio de medida σ-finitos, y sea $\pi = \mu \times \nu$ la medida producto en $X \times Y$. Si $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ es π-integrable, $F \in L^1(\pi)$, entonces las funciones $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(\mathbf{x}) = \int_Y F_{\mathbf{x}}\, d\nu, \qquad g(\mathbf{y}) = \int_X F^{\mathbf{y}}\, d\mu,$$

son mesurables, tienen integral finita, y

$$\int_X f\, d\mu = \int_{X\times Y} F\, d\pi = \int_Y g\, d\nu.$$

En otras palabras

$$\int_X \Big(\int_Y F\, d\nu \Big)\, d\mu = \iint_{X\times Y} F\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \Big(\int_X F\, d\mu \Big)\, d\nu.$$

Teorema de Fubini

Prueba: Como F es integrable con respecto de π, entonces su componentes F^+ y F^- también son integrables respecto de π.

Aplicando el Teorema de Tonelli a F^+ y F^-, deducimos que las funciones

$$f^+ = \int_Y (F^+)_{\mathbf{x}}\, d\nu, \quad g^+ = \int_X (F^+)^{\mathbf{y}}\, d\mu, \quad f^- = \int_Y (F^-)_{\mathbf{x}}\, d\nu, \quad g^- = \int_X (F^-)^{\mathbf{y}}\, d\mu,$$

poseen integrales finitas (f^+, f^- respecto de μ, y g^+, g^- respecto de ν), y vale

$$\begin{aligned} \int_X f^+ &= \int_{X\times Y} F^+\, d\pi = \int_Y g^+\, d\nu, \\ \int_X f^- &= \int_{X\times Y} F^-\, d\pi = \int_Y g^-\, d\nu. \end{aligned}$$

Por linealidad, restando ambas ecuaciones tenemos

$$\int_X f = \int_{X\times Y} F\, d\pi = \int_Y g\, d\nu. \quad \square$$

Ejemplos

Obs! La conclusión del lema anterior no se cumple si alguno de los espacios de medida no es σ-finito, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Sean $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{B}([0,1])$, y sean $\mu = \lambda^1$, $\nu =$ la medida de conteo. Se puede mostrar que la diagonal

$$D = \{(x,x) : \ x \in [0,1]\} \subset [0,1] \times [0,1]$$

es un subconjunto mesurable en $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0,1]$, tenemos

$$D_{\mathbf{x}} = \{y \in [0,1] : \ (\mathbf{x}, y) \in D\} = \{\mathbf{x}\} \ \text{ y } \ D^{\mathbf{y}} = \{x \in [0,1] : \ (x, \mathbf{y}) \in D\} = \{\mathbf{y}\}.$$

Pero,

$$\int_X \nu(D_{\mathbf{x}})\, d\mu = \int_X 1\, d\mu = 1, \qquad \int_Y \mu(D^{\mathbf{y}})\, d\nu = \int_Y 0\, d\nu = 0.$$

Obs!

- El teorema de Tonelli deja de ser válido si algún factor no es σ-finito.
- Sin embargo, si uno de los factores es $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{conteo})$ entonces el resultado es cierto.

Ejemplo: Sean $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{B}([0,1])$ y sean $\mu = \lambda^1$, $\nu =$ la medida de conteo, al igual que en el ejemplo anterior.

Consideremos $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{1}_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{xy}}$. Entonces

$$F_{\mathbf{x}}(y) = \mathbf{1}_{\{\mathbf{x}\}}(y) = \delta_{\mathbf{x}y}, \qquad F^{\mathbf{y}}(x) = \mathbf{1}_{\{\mathbf{y}\}}(x) = \delta_{x\mathbf{y}}.$$

Observe que

$$f(\mathbf{x}) = \int_Y F_{\mathbf{x}}\, d\nu = 1 \qquad \text{y} \qquad g(\mathbf{y}) = \int_X F^{\mathbf{y}}\, d\mu = 0.$$

Luego,

$$\int_X f(\mathbf{x})\, d\nu = \int_X 1\, d\mu = 1, \qquad \int_Y g(\mathbf{y})\, d\nu = 0.$$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Ejemplos

Ejemplo: Sean $X = Y = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{B}([0, 1])$ y sean $\mu = \nu = \lambda^1$, la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Consideremos la función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$F(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$