Medidas Producto

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 25) 03.mayo.2023

Medidas Producto

Es el turno de estudiar medidas en espacios del tipo $X \times Y$, donde X, Y son espacios de medida.

Definición

*Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida. Un conjunto de la forma $A \times B \subseteq X \times Y$, con $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, se llama un **rectángulo mesurable**.*

Consideramos la colección

$$Z_0 = \Big\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i : \; n \in \mathbb{N}, \; A_i \in \mathcal{A}, \; B_i \in \mathcal{B} \Big\} \subseteq X \times Y.$$

Obs!

- Todo elemento de Z_0 puede escribirse como unión disjunta de rectángulos mesurables.
- Z_0 es un álgebra de conjuntos (no es σ-álgebra).

Medidas Producto

Denotamos por $\mathcal{C} = \sigma(Z_0)$ a la σ-álgebra generada por Z_0. Queremos definir una medida π sobre $\mathcal{C}$ que satisfaga una identidad natural

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B), \quad \text{para } A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}. \tag{1}$$

Teorema (Existencia de la Medida Producto)

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida. Entonces, existe una medida π sobre $\mathcal{C} = \sigma(Z_0)$ tal que vale la identidad (1). Además, si ambas μ y ν son σ-finitas, entonces π es única.

Prueba: Supongamos que el rectángulo $A \times B \subseteq X \times Y$ es unión disjunta enumerable de rectángulos mesurables $\{A_k \times B_k\}_{k\geq 1}$, con $A_k \in \mathcal{A}$, $B_k \in \mathcal{B}$. Entonces

$$A \times B = \dot{\bigcup_{j\geq 1}} A_j \times B_j.$$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Luego, $$\mathbf{1}_A(x)\cdot\mathbf{1}_B(y) = \mathbf{1}_{A\times B}(x,y) = \mathbf{1}_{\cup_k A_k\times B_k}(x,y) = \sum_{k\geq 1}\underbrace{\mathbf{1}_{A_k}(x)\times\mathbf{1}_{B_k}(y)}_{\geq 0}.$$

Las sumas parciales de esta última serie forman una secuencia monótona tal que
$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{A_k}(x)\times\mathbf{1}_{B_k}(y) \nearrow \mathbf{1}_{A\times B}(x,y).$$

Por el Teorema de Convergencia Monótona, e integrando respecto de ν:
$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_A(x)\cdot\nu(B) &= \mathbf{1}_A(x)\int_Y \mathbf{1}_B(y)\,\nu(dy) = \int_Y \mathbf{1}_A(x)\cdot\mathbf{1}_B(y)\,\nu(dy) = \int_Y\sum_{k\geq 1}\mathbf{1}_{A_k}(x)\cdot\mathbf{1}_{B_k}(y)\,\nu(dy)\\
&= \int_Y\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{A_k}(x)\cdot\mathbf{1}_{B_k}(y)\,\nu(dy) = \lim_{n\to\infty}\int_Y\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{A_k}(x)\cdot\mathbf{1}_{B_k}(y)\,\nu(dy)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_Y\mathbf{1}_{A_k}(x)\cdot\mathbf{1}_{B_k}(y)\,\nu(dy) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{A_k}(x)\cdot\nu(B_k) = \sum_{k\geq 1}\mathbf{1}_{A_k}(x)\cdot\nu(B_k).
\end{aligned}$$

Medidas Producto

De nuevo por el Teorema de Convergencia Monótona, pero integrando ahora respecto de μ:

$$\begin{aligned}
\mu(A)\cdot\nu(B) &= \nu(B)\int_X \mathbf{1}_A(x)\,\mu(dx) = \int_X \mathbf{1}_A(x)\cdot\nu(B)\,\mu(dx) = \int_X \sum_{k\geq 1}\mathbf{1}_{A_k}(x)\cdot\nu(B_k)\,\mu(dx) \\
&= \int_X \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{A_k}(x)\cdot\nu(B_k)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty}\int_X\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{A_k}(x)\cdot\nu(B_k)\,\mu(dx) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_X \mathbf{1}_{A_k}(x)\cdot\nu(B_k)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)\cdot\nu(B_k) = \sum_{k\geq 1}\mu(A_k)\cdot\nu(B_k).
\end{aligned}$$

Sea $E\in Z_0$, sabemos que $E=\dot\bigcup_{n\geq 1}A_n\times B_n$, con $A_n\in\mathcal{A}$, $B_n\in\mathcal{B}$. Definimos,

$$\pi(E)=\sum_{n\geq 1}\mu(A_n)\cdot\nu(B_n).$$

Medidas Producto

π está bien definida sobre Z_0, y es enumerablemente aditiva. Por el Teorema de Extensión de Caratheódory, π se extiende a una medida π sobre todo $\mathcal{C} = \sigma(Z_0)$.

La condición de X y Y ser espacios σ-finitos, implican las condiciones para la unicidad. $\square$

Notación:

- $\pi = \mu \times \nu$ es la **medida producto** de μ y ν.
- $\mathcal{C} = \sigma(Z_0) = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ es la **σ-álgebra producto** de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.
- El **espacio producto** de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ es

$$(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu).$$

Definición

*Sean $E \subseteq X \times Y$ un subconjunto cualquiera, $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in Y$. La **x-sección** de E es el conjunto*

$$E_{\mathbf{x}} = \{y \in Y : \ (\mathbf{x}, y) \in E\},$$

*y la **y-sección** de E es el conjunto*

$$E^{\mathbf{y}} = \{x \in X : \ (x, \mathbf{y}) \in E\}.$$

Definición

*Sea $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función arbitraria, $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in Y$. La **x-sección** de f es la función $f_{\mathbf{x}} : Y \to \mathbb{R}$, con*

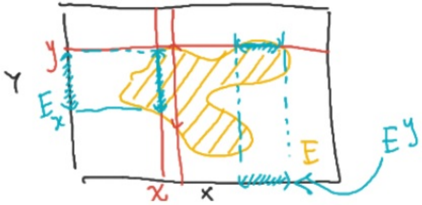
$$f_{\mathbf{x}}(y) = f(\mathbf{x}, y),$$

*mientras que la **y-sección** de f es la función $f^{\mathbf{y}} : X \to \mathbb{R}$, con*

$$f^{\mathbf{y}}(x) = f(x, \mathbf{y}).$$

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Medidas Producto



Observaciones:

- $E_{\mathbf{x}} = \pi_Y\big(E \cap (\{\mathbf{x}\} \times Y)\big)$ y $E^{\mathbf{y}} = \pi_X\big(E \cap (X \cap \{\mathbf{y}\})\big)$.
- Si consideramos los mapas de inclusión $i_{\mathbf{x}} : Y \to \{\mathbf{x}\} \times Y$ e $i^{\mathbf{y}} : X \to X \times \{\mathbf{y}\}$, entonces

$$E_{\mathbf{x}} = \pi_Y\big(E \cap i_{\mathbf{x}}(Y)\big) \;\; \text{y} \;\; E^{\mathbf{y}} = \pi_X\big(E \cap i^{\mathbf{y}}(X)\big).$$

- Además, $f_{\mathbf{x}} = f \circ i_{\mathbf{x}}$ y $f^{\mathbf{y}} = f \circ i^{\mathbf{y}}$.

Proposición

- *Si $E \subseteq X \times Y$ es mesurable (en la medida producto), entonces $E_{\mathbf{x}}$ y $E^{\mathbf{y}}$ son mesurables.*
- *Si $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es mesurable (en la medida producto), entonces $f_{\mathbf{x}}$ y $f^{\mathbf{y}}$ son mesurables.*

Prueba: Ejercicio! $\square$

Lema

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos. Si $E = A \times B$, con $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, entonces las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : Y \to \mathbb{R}$, definidas por

$$f(\mathbf{x}) = \nu(E_{\mathbf{x}}) \;\; y \;\; g(\mathbf{y}) = \mu(E^{\mathbf{y}}),$$

son mesurables, y

$$\int_X f \, d\mu = \int_{X \times Y} \mathbf{1}_E \, d\pi = \int_Y g \, d\nu.$$

Medidas Producto

Prueba: Vamos a suponer, primero, que los espacios X y Y tienen medida finita. Sea

$$\mathcal{M} = \{E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} : \text{ el resultado del enunciado vale para } E\}.$$

Vamos a mostrar que $\mathcal{M}$ es una clase monótona y que contiene a la colección Z_0.

Observe que si $E = A \times B$, con $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, entonces

$$f(\mathbf{x}) = \nu(E_{\mathbf{x}}) = \mathbf{1}_A(\mathbf{x}) \cdot \nu(B) \text{ y } g(\mathbf{y}) = \mu(E^{\mathbf{y}}) = \mu(A) \cdot \mathbf{1}_B(\mathbf{y}),$$

y

$$\int f\, d\mu = \int_X \mathbf{1}_A(\mathbf{x})\, \nu(B)\, d\mu = \mu(A)\, \nu(B) = \pi(E) = \int_Y \mu(A)\, \mathbf{1}_B(\mathbf{y})\, d\nu = \int g\, d\nu.$$

Esto muestra que $Z = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, \; b \in \mathcal{B}\} \subseteq \mathcal{M}$. Como cada elemento de Z_0 es unión disjunta enumerable de elementos en Z, por σ-aditividad, tenemos que

$$\int f\, d\mu = \pi(E) = \int g\, d\nu, \;\; \forall E \in Z_0,$$

lo que muestra que $Z_0 \subseteq \mathcal{M}$.

Medidas Producto

Mostramos ahora que $\mathcal{M}$ es una clase monótona. Sea $\{E_n\}_{n\geq 1}$ una secuencia ascendente de elementos en $\mathcal{M}$, con $E_n \nearrow E = \bigcup_n E_n$.

Consideremos las secuencias de funciones mesurables $\{f_n\}_n$ y $\{g_n\}_n$, $f_n : Y \to \mathbb{R}$, $g_n :\to \mathbb{R}$, con

$$f_n(\mathbf{x}) = \nu\big((E_n)_\mathbf{x}\big) \;\text{ y }\; g_n(\mathbf{y}) = \mu\big((E_n)^\mathbf{y}\big).$$

Como cada $E_n \in \mathcal{M}$, vale

$$\int f_n \, d\mu = \pi(E_n) = \int g_n \, d\nu, \quad \forall n \geq 1.$$

Además, $E_n \nearrow E \implies (E_n)_\mathbf{x} \nearrow E_\mathbf{x}$, $(E_n)^\mathbf{y} \nearrow E^\mathbf{y}$ y por continuidad superior

$$\nu\big((E_n)_\mathbf{x}\big) \nearrow \nu(E_\mathbf{x}), \quad \mu\big((E_n)^\mathbf{y}\big) \nearrow \mu(E^\mathbf{y}), \quad \pi(E_n) \nearrow \pi(E).$$

Esto muestra que $f_n \nearrow f$ y $g_n \nearrow g$.

Medidas Producto

Usando el Teorema de Convergencia Monótona, tenemos

$$\begin{aligned}\int_X f\,d\mu &= \int_X \lim_n f_n\,d\mu = \lim_n \int_X f_n\,d\mu = \lim_n \pi(E_n) = \pi(E) \\ &= \lim_n \int_Y g_n\,d\nu = \int_Y \lim_n g_n\,d\nu = \int_Y g\,d\nu.\end{aligned}$$

De ahí que $E \in \mathcal{M}$, y $\mathcal{M}$ atrapa límites de secuencias ascendentes.

Como π es una medida finita (ya que μ y ν lo son), el mismo argumento muestra que $\mathcal{M}$ atrapa límites de secuencias descendentes. Portanto, $\mathcal{M}$ es una clase monótona.

Por el Lema de Clases Monótonas, $Z_0 \subseteq \mathcal{M} \;\Rightarrow\; \mathcal{C} = \sigma(Z_0) \subseteq \mathcal{M}$, y vale el resultado.

En el caso de espacios σ-finitos, basta tomar una secuencia de rectánculos (finitos) Z_n, con $\pi(Z_n) < +\infty$, tales que $Z_n \nearrow X \times Y$, y aplicar el Teorema de Convergencia Monótona a $E \cap Z_n$. $\square$

Teorema (Teorema de Tonelli)

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *espacio de medida* σ*-finitos, y sea* $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ *una función mesurable no-negativa. Entonces, las funciones* $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$f(\mathbf{x}) = \int_Y F_{\mathbf{x}}\, d\nu, \qquad g(\mathbf{y}) = \int_X F^{\mathbf{y}}\, d\mu,$$

son mesurables y

$$\int_X f\, d\mu = \int_{X\times Y} F\, d\pi = \int_Y g\, d\nu.$$

En otras palabras

$$\int_X \Big(\int_Y F\, d\nu \Big)\, d\mu = \iint_{X\times Y} F\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \Big(\int_X F\, d\mu \Big)\, d\nu.$$

Prueba: Si $F = \mathbf{1}_E$, con $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, el Teorema de Tonelli se reduce al lema anterior

Teorema de Tonelli

pues

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \int_Y F_{\mathbf{x}}\, d\nu = \int_Y (\mathbf{1}_E)_{\mathbf{x}}\, d\nu = \int_Y \mathbf{1}_{E_{\mathbf{x}}}\, d\nu = \nu(E_{\mathbf{x}}) = \mathbf{1}_A(\mathbf{x})\, \nu(B), \\ g(\mathbf{y}) &= \int_X F^{\mathbf{y}}\, d\mu = \int_X (\mathbf{1}_E)^{\mathbf{y}}\, d\mu = \int_X \mathbf{1}_{E^{\mathbf{y}}}\, d\mu = \mu(E^{\mathbf{y}}) = \mu(A)\, \mathbf{1}_B(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

y

$$\int_X f\, d\mu = \int_X \mathbf{1}_A(\mathbf{x})\, \nu(B)\, d\mu = \mu(A)\, \nu(B) = \int_Y \mu(A)\, \mathbf{1}_B(\mathbf{y})\, d\nu = \int_Y g\, d\nu. \tag{2}$$

Si F es una función simple, con representación estándar $F = \sum_{k=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{E_j}$, entonces (2) vale por linealidad.

Finalmente, si F es mesurable y no-negativa, por el Lema del Sombrero, existe una secuencia de funciones simples $\{F_n\}_{n\geq 1}$ tales que $F_n \nearrow F$. Definimos

$$\varphi_n(\mathbf{x}) = \int_Y (F_n)_{\mathbf{x}}\, d\nu, \qquad \psi_n(\mathbf{y}) = \int_X (F_n)^{\mathbf{y}}\, d\mu.$$

Teorema de Tonelli

Por el Teorema de Convergencia Monótona,

$$\varphi_n = \int_Y (F_n)_{\mathbf{x}}\, d\nu \nearrow \int_Y F_{\mathbf{x}}\, d\nu = f, \qquad \psi_n = \int_X (F_n)^{\mathbf{y}}\, d\mu \nearrow \int_X F^{\mathbf{y}}\, d\mu = g.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_X f\, d\mu &= \int_X \lim_n \varphi_n\, d\mu = \lim_n \int_X \varphi_n\, d\mu \\ &= \lim_n \int_Y \psi_n\, d\nu = \lim_n \int_Y \psi_n\, d\nu = \int_Y g\, d\nu. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema (Teorema de Fubini)

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacio de medida σ-finitos, y sea $\pi = \mu \times \nu$ la medida producto en $X \times Y$. Si $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ es π-integrable, $F \in L^1(\pi)$, entonces las funciones $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(\mathbf{x}) = \int_Y F_{\mathbf{x}} \, d\nu, \qquad g(\mathbf{y}) = \int_X F^{\mathbf{y}} \, d\mu,$$

son mesurables, tienen integral finita, y

$$\int_X f \, d\mu = \int_{X\times Y} F \, d\pi = \int_Y g \, d\nu.$$

En otras palabras

$$\int_X \Big(\int_Y F \, d\nu \Big) \, d\mu = \iint_{X\times Y} F \, d(\mu \times \nu) = \int_Y \Big(\int_X F \, d\mu \Big) \, d\nu.$$

Teorema de Fubini

Prueba: Como F es integrable con respecto de π, entonces su componentes F^+ y F^- también son integrables respecto de π.

Aplicando el Teorema de Tonelli a F^+ y F^-, deducimos que las funciones

$$f^+ = \int_Y (F^+)_{\mathbf{x}}\, d\nu, \quad g^+ = \int_X (F^+)^{\mathbf{y}}\, d\mu, \quad f^- = \int_Y (F^-)_{\mathbf{x}}\, d\nu, \quad g^- = \int_X (F^-)^{\mathbf{y}}\, d\mu,$$

poseen integrales finitas (f^+, f^- respecto de μ, y g^+, g^- respecto de ν), y vale

$$\begin{aligned} \int_X f^+ &= \int_{X\times Y} F^+\, d\pi = \int_Y g^+\, d\nu, \\ \int_X f^- &= \int_{X\times Y} F^-\, d\pi = \int_Y g^-\, d\nu. \end{aligned}$$

Por linealidad, restando ambas ecuaciones tenemos

$$\int_X f = \int_{X\times Y} F\, d\pi = \int_Y g\, d\nu. \quad \square$$