Modos de Convergencia

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 24) 26.abril.2023

Modos de Convergencia

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Estudiamos varias formas de convergencia asociadas a $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Definición

*Sea $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ una secuencia de funciones mesurables, y sea $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Decimos que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ **converge puntualmente** a f si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon, \mathbf{x}) \in \mathbb{N}$ y*

$$n \geq n_0 \implies |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon.$$

Notación: $f_n \longrightarrow f$.

Definición

*Sea $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ una secuencia de funciones mesurables, y sea $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Decimos que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ **converge uniformemente** a f si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ y*

$$n \geq n_0 \implies |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon, \quad \forall \mathbf{x} \in X.$$

Notación: $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$.

Definición

Sea $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ una secuencia de funciones mesurables, y sea $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Decimos que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ ***converge casi en todo punto*** *a f si existe $M \in \mathcal{A}$, con $\mu(M) = 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ y todo $\mathbf{x} \in X - M$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon, \mathbf{x}) \in \mathbb{N}$ y*

$$n \geq n_0 \implies |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon, \quad \forall \mathbf{x} \in X - M.$$

Notación: $f_n \xrightarrow{\text{c.t.p.}} f$.

Definición

Sea $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ una secuencia de funciones mesurables, y sea $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Decimos que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ ***converge en medida*** *a f si para todo $\varepsilon > 0$, vale*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\Big(\{\mathbf{x} \in X : \; |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \geq \varepsilon\}\Big) = 0.$$

Notación: $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Modos de Convergencia

Definición

Sea $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^p(X)$ una secuencia de funciones integrables, y sea $f \in L^p(X)$. Decimos que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ ***converge en*** L^p *a f si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ y*

$$n \geq n_0 \implies \left|\left|f_n - f\right|\right|_p < \varepsilon, \quad \forall \mathbf{x} \in X.$$

Notación: $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

Observaciones:

- $$f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f \implies f_n \longrightarrow f \implies f_n \xrightarrow{\text{c.t.p.}} f.$$
- Esto de alguna forma nos dice que existen convergencias "más fuertes" que otras.
- De hecho, tenemos toda una jerarquía de convergencias.

Teorema

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, con $\mu(X) < +\infty$, y sea $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^p(X)$ una secuencia de funciones integrables tales que $f_n \xrightarrow{unif.} f$. Entonces, $f \in L^p(X)$ y $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

Prueba: Sea $\varepsilon > 0$, y sea $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \big|f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\big| < \varepsilon, \quad \forall \mathbf{x} \in X.$$

Si $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} ||f_n - f||_p &= \Big(\int_X |f_n(\mathbf{x}) - (\mathbf{x})|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_X \varepsilon^p \, d\mu\Big)^{1/p} = \Big(\varepsilon^p \int_X d\mu\Big)^{1/p} \\ &\leq \big(\varepsilon^p \, \mu(X)\big)^{1/p} = \varepsilon \, \mu(X)^{1/p} = \widetilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Esto muestra que $f_n \xrightarrow{L^p} f$. Además, de la desigualdad de Minkowski tenemos que

$$||f||_p = ||(f - f_n) + f_n||_p \leq ||f_n - f||_p + ||f_n||_p \leq \widetilde{\varepsilon} + ||f_n||_p < \infty,$$

lo que muestra que $f \in L^p(X)$. $\square$

- Lo anterior muestra que para $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset L^p$,

$$f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{L^p} f.$$

- La recíproca no vale.

Ejemplo: Sea $X = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$ y $\mu = \lambda^1$, la medida de Lebesgue 1-dimensional. Consideramos los intervalos

$$\begin{array}{llll}
I_1 = [0,1] & I_5 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] & I_9 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] & I_{13} = [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}] \\
I_2 = [0, \frac{1}{2}] & I_6 = [\frac{2}{3}, 1] & I_{10} = [\frac{3}{4}, 1] & I_{14} = [\frac{3}{5}, \frac{4}{5}] \\
I_3 = [\frac{1}{2}, 1] & I_7 = [0, \frac{1}{4}] & I_{11} = [0, \frac{1}{5}] & I_{15} = [\frac{4}{5}, 1] \\
I_4 = [0, \frac{1}{3}] & I_8 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] & I_{12} = [\frac{1}{5}, \frac{2}{5}] & \ldots
\end{array}$$

Modos de Convergencia

Consideramos ahora la secuencia de funciones $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$, dada por $f_n = \mathbf{1}_{I_n}$. Sea $f = 0 \in L^p(X)$.

Sea $T_m = \binom{m+1}{2} = \frac{m(m+1)}{2} = \sum_{i=1}^{m} i$, en m-ésimo número triangular. Observe que si $n > T_m$, entonces f_n es una función indicadora sobre un intervalo de longitud $< \frac{1}{m}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la propiedad arquimedeana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Luego, para $n > T_m$ vale

$$\begin{aligned} ||f_n - f||_p^p &= \int_X f_n - f\,p\,d\mu = \int_X |f_n p\,d\mu = \int_X \left|\mathbf{1}_{I_n}\right|^p d\mu = \int_X \mathbf{1}_{I_n}\,d\mu \\ &= \mu(I_n) < \frac{1}{m} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto muestra que $f_n \xrightarrow{L^p} f$. Por otro lado, para cada $\mathbf{x} \in X$ fijo, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ posee una subsecuencia idénticamente igual a 1, y otra idénticamente igual a 0. (Basta tomar subintervalos que contengan a $\mathbf{x}$ y subintervalos que no contengan a $\mathbf{x}$).

Luego $\{f_n(\mathbf{x})\}$ no converge, y tenemos $f \overset{\text{unif.}}{\not\longrightarrow} f$.

Teorema

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *espacio de medida con* $\mu(X) < \infty$. *Entonces* $f_n \xrightarrow{\text{c.t.p.}} f \implies f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Prueba: Sea $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ una secuencia de funciones mesurables, tal que $f_n \longrightarrow f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, μ-c.t.p. Entonces,

$$\mu\big(\{\mathbf{x} \in X : \; f_n(\mathbf{x}) \text{ no converge a } f(\mathbf{x})\}\big) = 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in NN$ definamos $A_n = \{\mathbf{x} \in X : \; |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| > \varepsilon\}$, y sea $B_n = \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$. Observe que los $\{B_n\}$ forman una secuencia decreciente de conjuntos mesurables, y como μ es finita, $\mu(B_1) < \infty$.

La propiedad de continuidad inferior garantiza que $\mu\Big(\bigcap\limits_{n\geq 1} B_n\Big) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n)$,

Notemos que si $\mathbf{x} \in \bigcap\limits_{n\geq 1} B_n$, entonces $|f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| > \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f_n(\mathbf{x}) \not\to f(\mathbf{x})$.

Así,
$$\bigcap_{n\geq 1} B_n \subseteq \{\mathbf{x}\in X:\ f_(\mathbf{x}) \text{ no converge a } f(\mathbf{x})\} = C.$$

Por monotonicidad $\mu\Big(\bigcap_{n\geq 1} B_n\Big) \leq \mu(C) = 0$, de modo que
$$\lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k\geq n} A_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0.$$

Como $A_n \subseteq \bigcup_{k\geq n} A_k$, tenemos que $\mu(A_n) \leq \mu(B_n)$.
Tomando el límite cuando $n\to\infty$, tenemos $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Esto es
$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{\mathbf{x}\in X:\ f_n(\mathbf{x}) \text{ no converge a } f(\mathbf{x})\}\big) = 0,$$

lo que muestra que $f_n \xrightarrow{\mu} f$. $\square$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Definición

*Sea $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ una secuencia de funciones mesurables, y sea $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Decimos que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ **es casi uniformemente convergente** a f si para todo $\delta > 0$, existe $E_\delta \in \mathcal{A}$, con $\mu(E_\delta) < \delta$, tal que*

$$f_n \xrightarrow{unif.} f, \quad en\ X - E_\delta.$$

Notación: $f_n \xrightarrow{\text{c.u.}} f$.

Definición

*Sea $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ una secuencia de funciones mesurables. Decimos que $\{f_n\}$ es **una secuencia de Cauchy en medida** si para todo $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{m,n\to\infty} \mu\big(\{\mathbf{x} \in X : \ |f_n(\mathbf{x}) - f_m(\mathbf{x})| \geq \varepsilon\}\big) = 0.$$

Notación: $\{f_n\}$ es μ-Cauchy.

Obs!

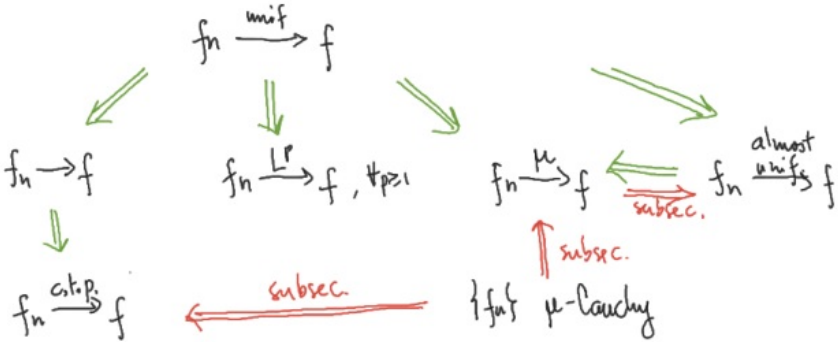
- Si $f_n \longrightarrow f$ y $|f_n| \leq w \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f_n \xrightarrow{L^p} f$.
- Si $f_n \xrightarrow{L^p} f$ implica que $f_n \xrightarrow{\mu} f$.
- Tenemos que si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es Cauchy en medida $\not\Longrightarrow \quad f_n \longrightarrow f$.

Podemos rescatar un resultado más débil, similar al Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Teorema (F. Riesz)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, y $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una secuencia de funciones mesurables, que es Cauchy en medida. Entonces, existe una subsecuencia $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ de $\{f_n\}_{n\geq 1}$ tal que $f_{n_k} \xrightarrow{\text{c.t.p.}} f$, y converge en medida a una función mesurable $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Prueba: Ver capítulo 7 de Bartle *Elements of Integration and Lebesgue Measure*.



Jerarquía de modos de convergencia.

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, y $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una secuencia de v.a.'s.

Definición

*Sea $\{X_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$ una secuencia de variables aleatorias, y sea X v.a., F_n la función de distribución de X_n, F la función de distribución de X. Decimos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ **converge en distribución** a X (**converge débilmente** o **converge en ley**), si*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\omega) = F(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Notación: $X_n \xrightarrow{d} X$.

Definición

*Sea $\{X_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$ una secuencia de variables aleatorias, y sea X v.a. Decimos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ **converge en probabilidad** a X si para todo $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Notación: $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Definición

Decimos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ ***converge casi seguramente*** *a* X*, si*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1.$$

Notación: $X_n \xrightarrow{c.s.} X$.

Definición

Decimos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ ***converge en*** L^p ***(converge en media de orden*** p***)*** *a* X*, si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

Notación: $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Definición

Decimos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ ***converge puntualmente*** *a* X*, si*

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

$$
\begin{tikzcd}
 & X_n \xrightarrow{L^s} X \arrow[r, Rightarrow] & X_n \xrightarrow{L^p} X,\ \forall s \geq p \geq 1 \arrow[d, Rightarrow] & \\
X_n \to X \arrow[r, Rightarrow] & X_n \xrightarrow{a.s.} X \arrow[r, Rightarrow, shift left] & X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \arrow[l, Rightarrow, shift left, "\text{subsec.}"] \arrow[r, Rightarrow] & X_n \xrightarrow{d} X
\end{tikzcd}
$$

Jerarquía de modos de convergencia en espacios de probabilidad.