Espacios L^p

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 23) 24.abril.2023

Espacios Normados

En esta sección estudiamos algunos espacios de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, en donde además, X es un espacio vectorial normado, y X es un espacio topológico.

Definición

*Sea $(X, +, \cdot, K)$ un espacio vectorial. Una **norma** en X es una función $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ que satisface:*

i) $||\mathbf{x}|| \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in X$ *y* *(i.i)* $||\mathbf{x}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.

ii) $||\alpha \mathbf{x}|| = |\alpha| \cdot ||\mathbf{x}||$, $\forall \mathbf{x} \in X$, $\forall \alpha \in K$.

iii) $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

Obs!

- Cuando $||\cdot||$ no satisface (i.i) se llama una **seminorma** o una **pseudonorma**.
- La estructura $(X, +, \cdot, K, ||\cdot||)$ se llama un **espacio normaldo**.

Espacios Normados

Ejemplo 1: $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R}, ||\cdot||_p)$ es un espacio normado, con la norma

$$||\mathbf{x}||_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \qquad p \geq 1.$$

Ejemplo 2: $(\mathbb{R}^{n\times n}, +, \cdot, \mathbb{R}, ||\cdot||_F)$ es un espacio normado, con la norma de Frobenius

$$||A||_F = \Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\Big)^{1/2}.$$

Estamos particularmente interesados en espacios de funciones.

Ejemplo 3: $(C(a,b), +, \cdot, \mathbb{R}, ||\cdot||)$, el espacio de funciones continuas en el intervalo (a,b), es un espacio normado, con la norma 1

$$||f||_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

o con la norma infinito $||f||_\infty = \sup_{x\in(a,b)} |f(x)|$.

Espacios Normados

Ejemplo 4: Consideremos el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda^1)$, y sea $(\mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R})), +, \cdot, \mathbb{R}, ||\cdot||)$, el espacio de funciones Borel-mesurables en $\mathbb{R}$. Este es un espacio normado, con la norma supremo

$$||f||_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\, dx.$$

Ejemplo 5: Consideremos un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, y recordemos que

$$L^1(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : \ f \text{ es } \mu\text{-integrable}\} = \Big\{f : X \to \mathbb{R} : \ f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}), \ \int_X |f|\, d\mu < +\infty\Big\}.$$

Definimos una función de norma en $L^1(\mu)$, dada por

$$||f||_\mu = \int_X |f|\, d\mu.$$

Lema

$L^1(\mu)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $||\cdot||_\mu$ es una seminorma. Mas aún

$$||f||_\mu = 0 \ \Leftrightarrow \ f = 0, \ \mu\text{-c.t.p.}$$

Espacios Normados

Prueba: Ya hemos visto que $L^1(\mu)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ $(f, g \in L^1(\mu) \;\Rightarrow\; \alpha f + \beta g \in L^1(\mu))$.
Mostramos que $||\cdot||_\mu$ es una seminorma:

- $||f||_\mu = {}_X\int |f|\, d\mu \geq 0$, para toda $f \in L^1(\mu)$.
- $||\alpha f||_\mu = \int_X = \big|\alpha f\big|\, d\mu = \int_X |\alpha|\, |f|\, d\mu = |\alpha| \int_X |f|\, d\mu = |\alpha|\; ||f||_\mu$.
- $||fg||_\mu = \int_X |f + g|\, d\mu \leq \int_X (|f| + |g|)\, d\mu = \int_X |f|\, d\mu + \int_X |g|\, d\mu = ||f||_\mu + ||g||_\mu$.

Esto muestra que $||\cdot||_\mu$ es una seminorma en $L^1(\mu)$.

Finalmente, $||f||_\mu = 0 \iff \int_X f\, d\mu = 0 \iff |f| = 0$ μ-c.t.p. $\iff f = 0$ μ-c.t.p. $\square$

Corregimos a continuación el problema de que $||\cdot||_f$ no sea una norma en $L^1(\mu)$.

Definición

*Dos funciones $f, g \in L^1(\mu)$ son μ-**equivalentes** si $f = g$ μ-c.t.p.*

Proposición

*La relación de ser μ-**equivalentes** es una relación de equivalencia en $L^1(\mu)$.* $\square$

Notación: $\sim_\mu$.

Definición

*Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Definimos el **espacio de Lebesgue** $L^1(X)$ como*

$$L^1(X) = \frac{L^1(\mu)}{\sim_\mu} = \{[f] : f \in L^1(\mu)\}.$$

Teorema

$||\cdot||_1$ define una norma sobre $L^1(X)$, de modo que $(L^1(X), +, \cdot, \mathbb{R}, ||\cdot||_1)$ es un espacio vectorial normado.

Prueba: Por el lema anterior, $||\cdot||_1$ es una seminorma sobre $L^1(X)$.
Además,

$$\big|\big|[f]\big|\big|_1 = 0 \iff \int_X |f|\,d\mu = 0 \iff |f| = 0 \ \mu\text{-c.t.p.} \iff [f] = [0].$$

Esto muestra que $||\cdot||_\mu$ define una norma en $L^1(X)$. $\square$

De igual manera, para $1 \leq p < \infty$, definimos el **espacio de Lebesgue** $L^p(X)$ como

$$L^p(X) = \frac{L^p(\mu)}{\sim_\mu} = \{[f] : f \in L^p(\mu)\} = \Big\{[f] : f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}), \int_X |f|^p\,d\mu < +\infty\Big\}.$$

y tenemos la seminorma

$$||f||_p = \int_X |f|^p \, d\mu, \qquad \text{para } f \in L^p(\mu).$$

El mismo argumento usado en el caso de $L^1(X)$ muestra que

Teorema

$||\cdot||_p$ define una norma sobre $L^p(X)$, de modo que $(L^p(X), +, \cdot, \mathbb{R}, ||\cdot||_p)$ es un espacio vectorial normado, para todo $1 \leq p < \infty$. $\square$

Obs:

- Los espacios $L^p(X)$ tienen propiedades importantes: son normados, son completos.
- $L^p(\mu)$ son los primeros ejemplos (no triviales) de un espacio de Banach.

Tenemos un caso adicional de espacio $L^p(X)$, cuando $p = \infty$.

Definición

*Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Definimos el espacio de Lebesgue $L^\infty(\mu)$ como el espacio de **funciones esencialmente acotadas**, esto es $|f| \leq C$ μ-c.t.p., para alguna $C \geq 0$.*

$$L^\infty(\mu) = \{f : f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}), |f| \leq C, \ \mu\text{-c.t.p.}, \ \textit{para alguna } C \geq 0\}.$$

Definición

*Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Definimos el **espacio de Lebesgue** $L^\infty(X)$ como*

$$L^\infty(X) = \frac{L^\infty(\mu)}{\sim_\mu} = \{[f] : f \in L^\infty(\mu)\}.$$

*Para $f \in L^1(X)$, definimos el **supremo esencial** de f por*

$$||f||_\infty = \inf\{C \geq 0 : \ |f| \leq C, \ \mu\text{-c.t.p.}\}.$$

Teorema

$||\cdot||_\infty$ *define una norma sobre* $L^\infty(X)$*, de modo que* $(L^\infty(X), +, \cdot, \mathbb{R}, ||\cdot||_\infty)$ *es un espacio vectorial normado.* $\square$

Desigualdades Importantes

En esta sección estudiamos algunas desigualdades importantes que se cumplen dentro de los espacio $L^p(X)$.

Teorema (Desigualdad de Hölder)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *espacio de medida,* $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$, *con* $p, q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Entonces* $fg \in L^1(X)$ *y* $||fg||_1 \leq ||f||_p \, ||q||_q$. *Esto es,*

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \Big(\int_X |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p} \Big(\int_X |g|^q \, d\mu \Big)^{1/q}.$$

Prueba:

- Si $||f||_p = 0$, entonces $f = 0$ μ-c.t.p. y el producto $fg = 0$ μ-c.t.p., lo que muestra que el lado izquierdo de la desigualdad es cero, y la desigualdad es válida.
- Si $||f||_p \infty$ ó $||g||_q \infty$, entonces el lado derecho de la desigualdad es infinito, y la desigualdad se cumple.

Desigualdades Importantes

Supongamos entonces que $||f||_p, ||g||_q \in (1, \infty)$.

- Si $p = \infty$ y $q = 1$, entonces $|fg| \leq ||f||_\infty \, |g|$ μ-c.t.p. Por la monotonicidad de la integral de Lebesgue, tenemos
$$||fg||_1 = \int_X |fg| \, d\mu \leq \int_X ||f||_\infty \, |g| \, d\mu = ||f||_\infty \int_X |g| \, d\mu = ||f||_\infty \, ||g||_1.$$
- Similarmente para el caso $p = 1$ y $q = \infty$.
- Supongamos que $p, q \in (1, \infty)$. Dividiendo f por $||f||_p$ y g por $||g||_q$, y por la linealidad de la integral de Lebesgue, podemos asumir que $||f||_p = 1$ y $||g||_q = 1$.

  Usando la Desigualdad de Young, con $a = |f(\mathbf{x})|$, $b = |g(\mathbf{x})|$, tenemos
$$\big|f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\big| \leq \frac{|f(\mathbf{x})|^p}{p} + \frac{|g(\mathbf{x})|^q}{q}, \quad \forall \mathbf{x} \in X.$$

  Integrando de ambos lados
$$||fg||_1 = \int_X |fg| \, d\mu \leq \int_X \frac{|f(\mathbf{x})|^p}{p} \, d\mu + \int_X \frac{|g(\mathbf{x})|^q}{q} \, d\mu = \frac{||f||_p^p}{p} + \frac{||g||_q^q}{q}.$$

Desigualdades Importantes

Lo anterior muestra que $||fg||_1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, lo que muestra la Desigualdad de Hölder. $\square$

Obs!

- Cuando $||f||_p = ||g||_q = 1$ La desigualdad de Hölder se vuelve una igualdad cuando $||f||_p^p = ||g||_q^q$ μ-c.t.p. (Ejercicio!)
- En el caso general, esto implica que existen constante $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha\,||f||_p^p = \beta\,||g||_q^q$ μ-c.t.p.
- Existe otra forma de probar la Desigualdad de Hölder usando la Desigualdad de Jensen.

Desigualdades Importantes

Definición

Dos números $p, q, > 1$ que cumplen con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se llaman ***índices conjugados***.

Observe que si $p = 2$, entonces $q = 2$, y este es el único índice auto-conjugado.

Tomando la Desigualdad de Hölder con $p = 2$, obtenemos que $||fg||_1 \leq ||f||_2 \, ||g||_2$. Esto es

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \Big(\int_X |f|^2 \, d\mu \Big)^{1/2} \Big(\int_X |g|^2 \, d\mu \Big)^{1/2}, \quad f, g \in L^2(X),$$

ó

$$\Big(\int_X |fg| \, d\mu \Big)^2 \leq \Big(\int_X |f|^2 \, d\mu \Big) \Big(\int_X |g|^2 \, d\mu \Big), \quad f, g \in L^2(X).$$

Obs! Toda la teoría de Análisis Armónico y Análisis de Fourier se desarrolla en $L^2(X)$.

Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, y sean $f, g \in L^2(X)$. Entonces, fg es μ-integrable y

$$\left| \int_X fg \, d\mu \right| \leq \int_X |fg| \, d\mu \leq ||f||_2 \, ||g||_2. \quad \square$$

Teorema (Desigualdad de Jensen)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *espacio de medida, con* $\mu(X) = 1$. *Sea* $f \in L^1(X)$, *y* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función convexa. Entonces,*

$$\varphi\Big(\int_X f \, d\mu \Big) \leq \int_X (\varphi \circ f) \, d\mu.$$

Prueba: Sea $x_0 = \displaystyle\int_X f \, d\mu < +\infty$. Como φ es convexa, existen constante $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $ax + b \leq \varphi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. (Esto se debe a la existencia, siempre, de un subdiferencial para funciones convexas).

Entonces, $ax_0 + b \leq \varphi(x_0)$.

Por otro lado, $\varphi(f(\mathbf{x})) \geq af(\mathbf{x}) + b$, para todo $\mathbf{x} \in X$ μ-c.t.p. Por monotonicidad

$$\int_X (\varphi \circ f) \, d\mu \geq \int_X (af(\mathbf{x}) + b) \, d\mu = a \int_X f(\mathbf{x}) \, d\mu + b \int_X d\mu = ax_0 + b = \varphi(x_0) = \varphi\Big(\int_X f \, d\mu \Big).$$

Teorema (Desigualdad de Minkowski)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Si $f, g \in L^p(X)$, con $p \geq 1$, entonces

$$\big|\big|f + g\big|\big|_p \leq ||f||_p + ||g||_p. \quad \square$$

Prueba: Primero, mostramos que $f + g$ es p-integrable. Del hecho que $\varphi(x) = |x|^p$ es convexa, por la Desigualdad de Jensen (para funciones en $\mathbb{R}$), tenemos

$$\big|\tfrac{1}{2}f + \tfrac{1}{2}g\big|^p \leq \big||\tfrac{1}{2}f| + |\tfrac{1}{2}g|\big|^p \leq \tfrac{1}{2}|f|^p + \tfrac{1}{2}|g|^p.$$

Luego, $\frac{1}{2^p}\,|f + g|^p \leq \frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p \;\Rightarrow\; |f + g|^p \leq 2^{p-1}\,(|f|^p + |g|^p)$.
Esto muestra que $f + g \in L^p(X)$.

Usando la desigualdad triangular, y la Desigualdad de Hölder

$$||f + g||_p^p \;=\; \int_X |f + g|^p\,d\mu \;=\; \int_X |f + g|\,|f + g|^{p-1}\,d\mu \;\leq\; \int_X (|f| + |g|)\,|f + g|^{p-1}\,d\mu$$

Desigualdades Importantes

$$\begin{aligned}
||f+g||_p^p &= \int_X |f+g|^p \, d\mu = \int_X |f+g|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu \leq \int_X (|f|+|g|)\,|f+g|^{p-1}\, d\mu \\
&\leq \int_X |f|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu + \int_X |g|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu \\
&\leq \left[\Big(\int_X |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int_X |g|^p \, d\mu\Big)^{1/p}\right]\Big(\int_X |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\, d\mu\Big)^{1-1/p} \\
&\leq (||f||_p + ||g||_p)\,\frac{||f+g||_p^p}{||f+g||_p}.
\end{aligned}$$

Multplicando ambos lados por $\dfrac{||f+g||_p}{||f+g||_p^p}$, obtenemos

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p. \quad \square$$

Teorema de Completitud

Definición

Una secuencia $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset L^p(X)$ *es una* ***secuencia de Cauchy*** *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$m, n \geq n_0 \implies ||f_n - f_m||_p < \varepsilon.$$

Una secuencia $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset L^p(X)$ ***converge*** *a* $f \in L^p(X)$ *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n \geq n_0 \implies ||f_n - f||_p < \varepsilon.$$

Obs! Toda secuencia convergente $\{f_n\}$ $\{f_n\}$ es de Cauchy.
El Recíproco no siempre vale.

Definición

Un espacio vectorial S *es* ***completo*** *si toda secuencia de Cauchy* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *en* S*, converge a una función* $f \in S$*.*

Teorema (Teorema de Completitud)

Para todo $1 \leq p < \infty$, el espacio $L^p(X)$ es un espacio lineal, normado con la norma

$$||f||_p = \Big(\int_X |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p},$$

y completo. Esto es, $L^p(X)$ es un espacio de Banach.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA