Aplicaciones Integral de Lebesgue

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 22) 19.abril.2023

Integrales a un parámetro

Aplicación 1: Integrales dependientes de un parámetro.

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f : X \times (a, b) \to \mathbb{R}$, con $f = f(\mathbf{x}, t)$, donde $\mathbf{x} \in X$ y $t \in (a, b)$ es un parámetro. Estamos interesados en estudiar integrales del tipo

$$F(t) = \int_X f(\mathbf{x}, t)\, \mu(d\mathbf{x}), \qquad \text{para } t \in (a, b).$$

Teorema (Teorema de Continuidad)

Sea $(a, b) \neq \varnothing$, y sea $f : X \times (a, b) \to \mathbb{R}$ tal que

i) $\mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x}, t) \in L^1(\mu)$, *para todo $t \in (a, b)$;*

ii) $t \longmapsto f(\mathbf{x}, t)$ *es continua, para todo $\mathbf{x} \in X$;*

iii) $|f(\mathbf{x}, t)| \leq w(\mathbf{x})$, $\forall (\mathbf{x}, t) \in X \times (a, b)$, *para alguna $w \in L^1(\mu)$.*

Entonces la función $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, dada por $F(t) = \int_X f(\mathbf{x}, t)\, \mu(d\mathbf{x})$ es continua.

Integrales a un parámetro

Prueba: Observe que para cada $t \in (a,b)$ fijo, de (i), el mapa $\mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x},t) \in L^1(\mu)$, de modo que

$$t \longmapsto F(t) = \int_X f(\mathbf{x},t)\,\mu(d\mathbf{x}) \;\text{ está bien definido,}$$

y vale

$$\int_X f(\mathbf{x},t)\,\mu(d\mathbf{x}) < +\infty.$$

Vamos a mostrar que para cada $t \in (a,b)$ y cada secuencia $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset (a,b)$ tales que $t_n \to t$, vale $\lim\limits_{n\to\infty} F(t_n) = F(t)$.

Por (ii), el mapa $t \longmapsto F(\mathbf{x},t)$ es continuo, luego $f_n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x},t_n) \to f(\mathbf{x},t)$.

Además, por (iii), $|f_n(\mathbf{x})| = |f(\mathbf{x},t_n)| \leq |w(\mathbf{x})|$, $\forall t_n \in (a,b)$; lo que muestra que las funciones $f_n \in L^1(\mu)$, $\forall n \geq 1$.

Integrales a un parámetro

Por el Teorema de Convergencia Dominada, $f_n \in L^1(\mu) \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x},t) \in L^1(\mu)$, y

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_X f(\mathbf{x},t)\,\mu(d\mathbf{x}) = \int \lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x})\,\mu(d\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(\mathbf{x})\,\mu(d\mathbf{x}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X f(\mathbf{x},t_n)\,\mu(d\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} F(t_n). \end{aligned}$$

Esto muestra que $F(t)$ es continua en (a,b). $\square$

Teorema (Teorema de Diferenciabilidad)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Si $f : X \times (a,b) \to \mathbb{R}$ satisface

i) $\mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x}, t) \in L^1(\mu)$, *para todo* $t \in (a,b)$;

ii) $t \longmapsto f(\mathbf{x}, t)$ *es diferenciable en* t, *para todo* $\mathbf{x} \in X$;

iii) $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\right| \leq w(\mathbf{x})$, $\forall (\mathbf{x}, t) \in X \times (a,b)$, *para alguna* $w \in L^1(\mu)$.

Entonces la función $F : (a,b) \to \mathbb{R}$, *dada por* $F(t) = \displaystyle\int_X f(\mathbf{x}, t)\, \mu(d\mathbf{x})$ *es diferenciable en* (a,b) *y*

$$\frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} \int_X f(\mathbf{x}, t)\, \mu(d\mathbf{x}) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\, \mu(d\mathbf{x}).$$

Prueba: Sea $t \in (a,b)$ y fijemos una secuencia $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset (a,b)$ tal que $t_n \neq t$ y $t_n \to t$.

Integrales a un parámetro

Definimos

$$f_n(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x},t_n) - f(\mathbf{x},t)}{t_n - t} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x},t).$$

Esto muestra en particular que $\mathbf{x} \longmapsto \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x},t)$ es mesurable (ya que es múltiplo escalar y resta de funciones mesurables).

Por el Teorema del Valor Medio, existe $\vartheta = \vartheta(\mathbf{x},n) \in (a,b)$ tal que

$$|f_n(\mathbf{x})| = \tfrac{1}{|t_n - t|}\big|f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x},t_n)\big| = \left|\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x},\vartheta)\right| \leq |w(\mathbf{x})|, \quad \forall n \geq 1.$$

Así, $f_n \in L^1(\mu)$, y la secuencia $\{f_n\}_{n\geq 1}$ satisface las condiciones del Teorema de Convergencia Limitada. Luego

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim_{n\to\infty} \int_X \frac{f(\mathbf{x},t_n) - f(\mathbf{x},t)}{t_n - t}\, \mu(d\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(\mathbf{x})\, \mu(d\mathbf{x}) \\ &= \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x})\, \mu(d\mathbf{x}) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x},t)\, \mu(d\mathbf{x}). \quad \square \end{aligned}$$

Integral de Riemann vs. Lebesgue

Ejemplo: Considere la función de Dirichlet $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Recordemos que en el contexto de la integral de Riemann, $\int_0^1 f(x)\,dx$ no existe.

¿Qué ocurre con la integral de Lebesgue de f?

En la medida de Lebesgue λ^1 ($d\lambda^1 = dx$), observe que $\mathbb{Q}$ es un conjunto de medida nula. En particular, $\lambda^1(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} f(x)\,d\lambda^1 &= \int_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} f(x)\,d\lambda^1 + \int_{\mathbb{Q}^c\cap[0,1]} f(x)\,d\lambda^1 \\ &= \int_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} 1\,d\lambda^1 + \int_{\mathbb{Q}^c\cap[0,1]} 0\,d\lambda^1 = \mu(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = 0. \end{aligned}$$

Así, la integral de Lebesgue existe y $\int f\,d\lambda^1 = 0$.

Integral de Riemann vs. Lebesgue

Obs!

- La integral de Riemann tiene limitantes.
- La motivación de la integral de Lebesgue es resolver estas limitantes.
- Nos gustaría mostrar que para una familia amplia de funciones, vale

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda^1 = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Recordemos que para una partición $P = \{a = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n = b\}$ de $[a, b]$, tenemos las sumas de Darboux

$$s(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \qquad \text{y} \qquad S(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}),$$

donde $m_i = \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f(x)$ y $M_i = \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f(x)$.

Integral de Riemann vs. Lebesgue

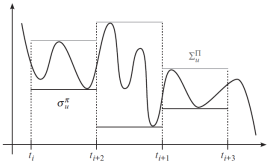
La integral inferior y superior de Darboux, son dadas por

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_P s(P,f) \qquad \text{y} \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_P S(P,f).$$

En particular, f es Riemann integrable en $[a,b]$ $\iff$ $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$

Observemos que a $s(P,f)$ y $S(P,f)$ le corresponden a funciones simples específicas

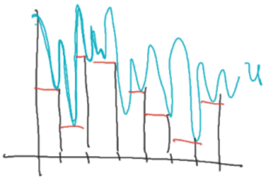
$$\sigma_f^P(x) = \sum_{i=1}^n m_i\,\mathbf{1}_{[t_{i-1},t_i]}(x) \qquad \text{y} \qquad \Sigma_f^P(x) = \sum_{i=1}^n M_i\,\mathbf{1}_{[t_{i-1},t_i]}(x).$$

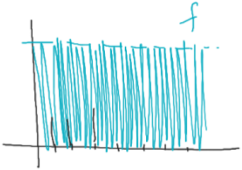


Integral de Riemann vs. Lebesgue

Así, para toda partición P de $[a,b]$, vale $\sigma_f^P \leq f \leq \Sigma_f^P$, y

$$\int \sigma_f^P \, d\lambda^1 = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \mathbf{1}_{[t_{i-1},t_i]} = s(P,f), \qquad \int \Sigma_f^P \, d\lambda^1 = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \mathbf{1}_{[t_{i-1},t_i]} = S(P,f).$$



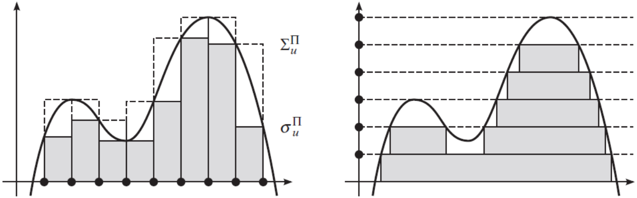


A medida que las oscilaciones aumentan (de forma patológica), la integral de Riemann va a fallar con alta probabilidad.

Pregunta: ¿Cómo es que la integral de Lebesgue resuelve este problema?

Integral de Riemann vs. Lebesgue

Para responder esto, recordemos cómo se calcular la integral de Lebesgue para funciones mesurables $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ (Lema del Sombrero).



(a) Particiones en la integral de Riemann. (b) Particiones en la integral de Lebesgue.

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ función mesurable y Riemann-integrable en (a, b). Entonces, $f \in L^1(\lambda^1)$ y

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Prueba: Como f es Riemann-integrable, entonces existe una secuencia de particiones

$$P_1 \subseteq P_2 \subseteq P_3 \subseteq \ldots \subseteq P_k \subseteq \ldots$$

tales que

$$\lim_{k\to\infty} s(P_k, f) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \lim_{k\to\infty} S(P_k, f) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

con

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

Las secuencias de funciones simples $\sigma_k = \sigma_f^{P_k}$ y $\Sigma_k = \Sigma_f^{P_k}$ son monótonas, tales que

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \ldots \ldots \Sigma_3 \leq \Sigma_2 \leq \Sigma_1,$$

y convergen monótonamente a $\sigma_k \nearrow \sigma_f$ y $\Sigma_k \searrow \Sigma_f$, donde $\sigma_f \leq f \leq \Sigma_f$.

Integral de Riemann vs. Lebesgue

Por el Teorema de Convergencia Monótona

$$\underline{\int}_{[a,b]} \sigma_f \, d\lambda^1 \;=\; \lim_{k\to\infty} s(P_k, f) = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \sigma_k \, d\lambda^1 = \int_{[a,b]} \lim_{k\to\infty} \sigma_k \, d\lambda^1 = \int_{[a,b]} \sigma_f \, d\lambda^1.$$

$$\overline{\int}_{[a,b]} \Sigma_f \, d\lambda^1 \;=\; \lim_{k\to\infty} S(P_k, f) = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \Sigma_k \, d\lambda^1 = \int_{[a,b]} \lim_{k\to\infty} \Sigma_k \, d\lambda^1 = \int_{[a,b]} \Sigma_f \, d\lambda^1.$$

De ahí, $\displaystyle\int_{[a,b]} (\Sigma_f - \sigma_f) \, d\lambda^1 = \int_{[a,b]} \sigma_f \, d\lambda^1 - \int_{[a,b]} \sigma_f \, d\lambda^1 = \overline{\int} \Sigma_f - \underline{\int} \sigma_f = \overline{\int} f - \underline{\int} f = 0.$
Así, $\Sigma_f - \sigma_f = 0$ λ^1-c.t.p. $\Rightarrow$ $\Sigma_f = \sigma_f$ λ^1-c.t.p. (y recordemos que $\sigma_f \leq f \leq \Sigma_f$).
Luego $\{f \neq \sigma_f\} \cup \{f \neq \Sigma_f\} \in N_{\lambda^1}$ y $f = \sigma_f$ λ^1-c.t.p.

Como σ_f es función simple, entonces $\sigma_f \in L^1(\lambda^1)$ $\Rightarrow$ $f \in L^1(\lambda^1)$. Además, como $f = \sigma_f$ λ^1-c.t.p.

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda^1 = \int_{[a,b]} \sigma_f \, d\lambda^1 = \underline{\int}_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx. \quad \square$$