Teoremas de Convergencia

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 21) 17.abril.2023

Teoremas de Convergencia

En esta sección estudiaremos algunos teoremas de convergencia importantes en el desarrollo de la teoría de la integral de Lebesgue, y de funciones $L^1(\mu)$, así como sus apliaciones.

Recordemos que en el Aula 18, desarrollamos el Teorema de Beppo Levi.

Teorema (Teorema de Beppo Levi)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Para una secuencia no-decreciente de funciones mesurables positivas $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, con $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \ldots$. Entonces, el límite $f = \lim_n f_n = \sup_n f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Además,

$$\int (\sup_n f_n)\, d\mu = \int f\, d\mu = \sup_n \int f_n\, d\mu.$$

Equivalentemente,

$$\int (\lim_n f_n)\, d\mu = \int f\, d\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu.$$

Teorema (Lema de Fatou)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *espacio de medida, y sea* $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ *una secuencia de funciones mesurables no-negativas. Entonces la función* $f = \liminf_n f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ *y*

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Prueba: Recordemos que $\liminf_n f_n = \sup_k \inf_{n\geq k} f_n$ siempre existe, y ya probamos que define una función mesurable no negativa.

Como la secuencia $g_k = \inf_{n\geq k} f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, es tal que $g_k \nearrow f$, por Beppo Levi

$$\begin{aligned} \int \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu &= \int \sup_k \inf_{n\geq k} f_n\, d\mu = \sup_k \Big(\int \inf_{n\geq k} f_n\, d\mu \Big) \\ &\leq \sup_k \Big(\inf_{n\geq k} \int f_n\, d\mu \Big) = \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema (Lema de Fatou Revertido)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, y sea $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ una secuencia de funciones mesurables no-negativas, tales que $f_n \leq f$, $\forall n$, para una $f \in \mathcal{M}^{\mathcal{A}}$, con $\int f\, d\mu < +\infty$. Entonces

$$\int \big(\limsup_{n\to\infty} f_n\big)\, d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Prueba: Ejercicio! $\square$

Obs!

- El Lema de Fatou es uno de los "lemas más importantes" del análisis.
- Existe una versión del Lema de Fatou para medidas. Si $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$
  - i) $\mu\big(\liminf_n A_n\big) \leq \liminf_n \mu(A_n)$.
  - ii) $\limsup_n \mu(A_n) \leq \mu\big(\limsup_n A_n\big)$, cuando μ es una medida finita.

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Teorema (Teorema de Convergencia Monótona)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *espacio de medida.*

i) *Sea* $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^1(\mu)$ *una secuencia creciente de funciones integrables, con* $_n \nearrow f$, $f = \sup_n f_n$. *Entonces* $f \in L^1(\mu) \iff \int f\, d\mu < +\infty$ *y en ese caso*

$$\int f\, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

ii) *Sea* $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^1(\mu)$ *una secuencia decreciente de funciones integrables, con* $_n \searrow f$, $f = \inf_n f_n$. *Entonces* $f \in L^1(\mu) \iff \int f\, d\mu > -\infty$ *y en ese caso*

$$\int f\, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Prueba: Observe que (i) $\Rightarrow$ (ii) tomando $-f_n$. Basta entonces mostrar (i).

Teoremas de Convergencia

Como $f_n \in L^1(\mu)$ para todo $n \geq 1$, y $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots$, entonces las funciones $f_n - f_1 \geq 0$ definen una secuencia creciente de funciones integrables en $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$,

$$0 = f_1 - f_1 \leq f_2 - f_1 \leq f_3 - f_1 \leq \cdots \leq f_n - f_1 \leq \cdots$$

Por Beppo Levi, en el límite, $\lim_n (f_n - f_1) = f - f_1 \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, y asumiendo $f \in L^1(\mu)$

$$0 \leq \sup_n \int (f_n - f_1)\, d\mu = \int \sup_n (f_n - f_1)\, d\mu = \int (f - f_1)\, d\mu.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\sup_n \int f_n\, d\mu &= \sup_n \int \left[(f_n - f_1) + f_1\right] d\mu = \sup_n \left[\int (f_n - f_1)\, d\mu + \int f_1\, d\mu\right] \\
&= \sup_n \int (f_n - f_1)\, d\mu + \int f_1\, d\mu = \int (f - f_1)\, d\mu + \int f_1\, d\mu = \int f\, d\mu \\
&= \int \sup_n f_n\, d\mu < +\infty.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, si $\sup_n \int f_n \, d\mu < +\infty$, entonces de nuevo por Beppo Levi

$$\int (f - f_1)\, d\mu = \int \sup_n (f_n - f_1)\, d\mu = \sup_n \int (f_n - f_1)\, d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu - \int f_1 \, d\mu < +\infty.$$

por lo que $f - f_1 \in L^1(\mu)$. Como $f_1 \in L^1(\mu)$, entonces $f = (f - f_1) + f_1 \in L^1(\mu)$. Esto muestra que

$$\int f \, d\mu = \int (f - f_1)\, d\mu + \int f_1 \, d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu < +\infty. \; \square$$

Teorema (Teorema de Convergencia Dominada)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, y sea $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^1(\mu)$ una secuencia de funciones integrables, tales que $|f_n(\mathbf{x})| \leq w(\mathbf{x})$, $\forall n$, $\forall \mathbf{x} \in X$, para alguna función integrable $w \in L^1(\mu)$, y suponga que $f = \lim_n f_n$. Entonces

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0.$

ii) $f \in L^1(\mu)$ *y vale*

$$\int f\, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Prueba: De la hipótesis $|f_n| \leq w$, para todo $n \geq 1$, tenemos que $|f| = \lim_n |f_n| \leq w$. Entonces, como $w \in l^1(\mu)$

$$\int |f|\, d\mu \leq \int w\, d\mu < +\infty,$$

y esto muestra que $|f| \in L^1(\mu)$. Portanto, $f \in L^1(\mu)$.

(i) De la desigualdad triangular, tenemos $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq w + w = 2w$. Luego, $2w - |f_n - f| \geq 0$, para todo $n \geq 1$.

Por el Lema de Fatou

$$\begin{aligned} \int 2w\, d\mu &= \int \liminf_{n\to\infty} (2w - |f_n - f|)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (2w - |f_n - f|)\, d\mu \\ &\leq \int 2w\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu. \end{aligned}$$

De ahí que $0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} |f_n - f|\, d\mu \leq 0$.

En consecuencia, $\liminf_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = \limsup_{n\to\infty} |f_n - f|\, d\mu = 0$,

y portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu.$$

Mostramos que (i) $\Rightarrow$ (ii). Observe que

$$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu.$$

Luego, $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0.$

Esto muestra que $\left| \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| = 0.$

En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu. \square$$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Teoremas de Convergencia

Obs!

- En el Teorema de Convergencia Dominada, podemos reemplazar $\forall \mathbf{x} \in X$ en el enunciado por $\forall \mathbf{x} \in X$ μ-c.t.p.

- Si hacemos lo anterior, el conjunto

$$N = \{\mathbf{x} \in X : \lim_n f_n(\mathbf{x}) \text{ no existe}\} \cup \bigcup_{n \geq 1} \{\mathbf{x} \in X : |f_n(\mathbf{x})| \geq w(\mathbf{x})\}$$

  es un conjunto mesurable, con medida $\mu(N) = 0$, ya que $f_n, w \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

  En ese caso, las funciones $f \cdot \mathbf{1}_{N^c}$ y $f_n \cdot \mathbf{1}_{N^c}$ satisfacen las condiciones del teorema.

- La hipótesis de las f_n ser dominada uniformemente ($|f_n(\mathbf{x})| \leq |w(\mathbf{x})|, \forall \mathbf{x} \in X$), para $w \in L^1(\mu)$ es esencial.

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Teoremas de Convergencia

Ejemplo: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda^1)$. Definamos la secuencia de funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por

$$f_n(\mathbf{x}) = n \cdot \mathbf{1}_{[0,1/n]}(\mathbf{x}) = \begin{cases} n, & 0 \leq \mathbf{x} \leq \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Las f_n son funcinoes simples,

Entonces $f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$.

Además, $f_n = n \cdot \mathbf{1}_{[0,1/n]} \to 0$, λ^1-c.t.p.

Por otro lado,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda^1 \;=\; \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \mathbf{1}_{[0,1/n]} \, \lambda^1 \;=\; n \int_0^{1/n} d\lambda^1 \;=\; n \cdot \lambda^1([0, 1/n]) \;=\; n \cdot \tfrac{1}{n} \;=\; 1, \quad \forall n \geq 1.$$

Así, tenemos $\displaystyle\int \lim_n f_n \, d\lambda^1 = \int 0 \, d\lambda^1 = 0$ y $\displaystyle\lim_n \int f_n \, d\lambda^1 = \lim_n 1 = 1$.