Conjuntos de Medida Nula

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 20) 12.abril.2023

Conjuntos de Medida Nula

Definición

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Un conjunto mesurable $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0$ se llama un ***conjunto de medida nula*** *(nullset, ó μ-nullset).*

Denotamos por $\mathcal{N}_\mu = \{A \in \mathcal{A} : \ \mu(A) = 0\}$ al conjunto de conjuntos de medida nula.

Definición

Si una propiedad $\pi(\mathbf{x})$ vale para todo $\mathbf{x} \in X$, excepto para aquellos $\mathbf{x}$ contenidos en algún conjunto de medida nula $A \in \mathcal{A}$, entonces decimos que $\pi(\mathbf{x})$ vale ***casi en todo punto*** *o* ***casi en todas partes****.*

Notación: c.t.p. ó μ-c.t.p. (en inglés, **almost everywhere**, a.e. ó μ-a.e.)

Conjuntos de Medida Nula

Cuidado! El concepto de *casi en todas partes* μ-c.t.p. puede ser engañoso. Por ejemplo

- Si $\pi(\mathbf{x})$ vale μ-c.t.p. $\Longrightarrow$ $\underbrace{\{\mathbf{x} \in X : \ \pi(\mathbf{x}) \text{ es falso}\}}_{\text{puede no ser mesurable}} \subseteq A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A) = 0$.

Otro ejemplo: Sean $u, v : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones. No es lo mismo decir

a) u es continua c.t.p.

b) $u = v$ c.t.p., con v función continua.

Ejemplo: Consideremos la medida de Lebesgue λ^1 en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. La función de Dirichlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \mathbf{x} \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

es una función que no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$. sin embargo, $f = 0$ λ^1-c.t.p. y 0 es una función continua.

Teorema (Desigualdad de Markov)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, y $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Para todo conjunto mesurable $A \in \mathcal{A}$ y todo $c > 0$, vale

$$\mu(\{|f| \geq c\} \cap A) \leq \frac{1}{c} \int_A |f| \, d\mu.$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
\mu(\{|f| \geq c\} \cap A) &= \int_{\{|f| \geq c\} \cap A} d\mu = \int_X \mathbf{1}_{\{|f| \geq c\} \cap A} \, d\mu = \int_X \mathbf{1}_{\{|f| \geq c\}} \cdot \mathbf{1}_A \, d\mu \\
&= \int_X \frac{c}{c} \mathbf{1}_{\{|f| \geq c\}} \cdot \mathbf{1}_A \, d\mu = \int_A \frac{c}{c} \mathbf{1}_{\{|f| \geq c\}} \, d\mu \\
&\leq \int_A \frac{|f|}{c} \mathbf{1}_{\{|f| \geq c\}} \, d\mu = \frac{1}{c} \int_A |f| \cdot \mathbf{1}_{\{|f| \geq c\}} \, d\mu \\
&\leq \frac{1}{c} \int_A |f| \, d\mu. \quad \square
\end{aligned}$$

Conjuntos de Medida Nula

Obs! Cuando $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad, y si $f = X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una variable aleatoria, la Desigualdad de Markov se vuelve

$$\mathbb{P}\big(\{|X| \geq c\} \cap A\big) \leq \frac{1}{c} \int_A |X| \, d\mathbb{P}.$$

Tomando ahora $A = \Omega$ y $X \geq 0$, obtenemos

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq c) \leq \frac{1}{c} \int_\Omega X \, d\mathbb{P}.}$$

Que es la desigualdad de Markov que se estudia en probabilidad.

Notación: Cuando estamos en un espacio de probabilidad $(\Omega . \mathcal{F}, \mathbb{P})$ una propiedad $\mathbb{P}$-c.t.p. se llama **casi seguramente** ó c.s.

Proposición

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *espacio de medida, y sea* $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. *Entonces*

i) $\displaystyle\int_X f\, d\mu = 0 \;\Leftrightarrow\; |f| = 0$ *c.t.p.* $\Leftrightarrow\; \mu\{f \neq 0\} = 0.$

ii) $\mathbf{1}_A \cdot f \in L^1(\mu)$, *para todo* $A \in \mathcal{N}_\mu$, *y vale* $\displaystyle\int_A f\, d\mu = 0.$

Prueba: (ii) Definamos la secuencia de funciones $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, dadas por $f_n = f \wedge n = \min\{|f|, n\}$. Las $f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ son mesurables (son mínimo de funciones en $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, y $f_n \nearrow |f|$.
Por el Teorema de Beppo Levi, $|f| \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ y $\int |f|\, d\mu = \sup_n \int f_n\, d\mu$.
Para cualquier conjunto de medida nula $A \in \mathcal{N}_\mu$, vale $\mathbf{1}_A \cdot f_n \nearrow \mathbf{1}_A \cdot |f|$. De nuevo, el Teorema de Beppo Levi garantiza que, $\mathbf{1}_A \cdot |f| \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ y $\displaystyle\int \mathbf{1}_A \cdot |f|\, d\mu = \sup_n \int \mathbf{1}_A \cdot f_n\, d\mu.$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Conjuntos de Medida Nula

Así

$$\begin{aligned}
\int_A |f|\,d\mu &= \int_X \mathbf{1}_A \cdot \sup_n f_n\,d\mu = \sup_n \int_X \mathbf{1}_A \cdot f_n\,d\mu = \sup_n \int_X \mathbf{1}_A \cdot \min\{|f|, n\}\,d\mu \\
&\leq \sup_n \int_X \mathbf{1}_A \cdot n\,d\mu = \sup_n\, n \int_X \mathbf{1}_A\,d\mu = \sup_n\, n \int_A d\mu = \sup_n\, n\,\mu(A) \\
&\leq \sup_n\, n \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Esto muestra que $0 \leq \displaystyle\int_A |f|\,d\mu \leq 0$, y portanto, $\int_A |f|\,d\mu$.

Por Cauchy-Schwarz, $\left|\int \mathbf{1}_A \cdot f\,d\mu\right| \leq \int |\mathbf{1}_A \cdot f|\,d\mu = \int_A |f|\,d\mu = 0 < +\infty$. De ahí que $\mathbf{1}_A \cdot f \in L^1(\mu)$, para todo A de medida nula.

(i) Mostramos ahora que $\int_X f\,d\mu = 0 \;\Leftrightarrow\; |f| = 0$ c.t.p $\Leftrightarrow\; \mu\{f \neq 0\} = 0$.
La segunda equivalencia es inmediata a partir de la definición de μ-c.t.p., pues

$$|f| = 0 \;\mu\text{-c.t.p.} \iff \mu\{f \neq 0\} = \mu\{|f| \neq 0\} = 0.$$

Conjuntos de Medida Nula

Para la primera equivalencia, ($\Leftarrow$) Como $|f| = 0$ μ-c.t.p., entonces $A = \{f \neq 0\} \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0$.

Así,

$$\begin{aligned}
\int |f|\,d\mu &= \int_X |f|\,d\mu = \int_{A\cup A^c} |f|\,d\mu = \int_A |f|\,d\mu + \int_{A^c} |f|\,d\mu = \underbrace{\int_A |f|\,d\mu}_{=0} + \int_{\{|f|=0\}} |f|\,d\mu \\
&= \int_{\{|f|=0\}} 0\,d\mu = 0.
\end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Suponga ahora que $\int |f|\,d\mu = 0$. Usamos la desigualdad de Markov con $A = X$. Así, para cualquier $c > 0$, vale

$$\mu\big(\{|f| \geq c\}\big) = \mu\big(\{|f| \geq c\} \cap X\big) \leq \frac{1}{c}\int_X |f|\,d\mu.$$

Conjuntos de Medida Nula

Como

$$\begin{aligned}
\mu(\{|f| > 0\}) &= \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1}\{|f| \geq \tfrac{1}{n}\}\Big) \leq \sum_{n\geq 1}\mu(\{|f| \geq \tfrac{1}{n}\}) \\
&\leq \sum_{n\geq 1} n \underbrace{\int_X |f|\,d\mu}_{=0} = \sum_{n\geq 1} n\cdot 0 \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Esto muestra que $\mu\{f = 0\} = 0$, y portanto $f = 0$ μ-c.t.p. $\square$

Corolario (Corolario 1)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, y seean $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ funciones mesurables, tales que $f = g$ μ-c.t.p. Entonces

i) $f, g \geq 0 \implies \int f\, d\mu = \int g\, d\mu$.

ii) *Si $f \in L^q(\mu)$, entonces $g \in L^1(\mu)$ y $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$.*

Prueba: (i) Como f, g son mesurables, el conjunto $N = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})\}$ es mesurable (pues $N = (f-g)^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}) = (f-g)^{-1}(0)^c$, y $f - g$ es mesurable). Además, $\mu(N) = 0$.

$$\begin{aligned} \int f\, d\mu &= \int_X f\, d\mu = \int_{N \cup N^c} f\, d\mu = \int_N f\, d\mu + \int_{N^c} f\, d\mu = \underbrace{\int_N f\, d\mu}_{=0} + \int_{\{f=g\}} f\, d\mu \\ &= \int_{N^c} g\, d\mu = \int_N g\, d\mu + \int_{N^c} g\, d\mu = \int_X g\, d\mu = \int g\, d\mu. \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Conjuntos de Medida Nula

(ii) Como $f = g$ μ-c.t.p., entonces $f^+ = g^+$ y $f^- = g^-$ μ-c.t.p.
(Esto es porque $\{f^+ \neq g^+\}, \{f^- \neq g^-\} \subseteq \{f \neq g\} \subseteq A$, con $\mu(A) = 0$.)

Supongamos que $f \in L^1(\mu)$. Entonces $\int f^+\, d\mu < +\infty$ y $\int f^-\, d\mu < +\infty$.
De la parte (i), tenemos

$$\left.\begin{array}{lcl} f^+ = g^+ \ \mu\text{-c.t.p.} & \Rightarrow & \displaystyle\int g^+\, d\mu = \int f^+\, d\mu < +\infty \\ f^- = g^- \ \mu\text{-c.t.p.} & \Rightarrow & \displaystyle\int g^-\, d\mu = \int f^-\, d\mu < +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow g \in L^1(\mu).$$

Además, $\displaystyle\int g\, d\mu = \int g^+\, d\mu - \int g^-\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu = \int f\, d\mu.$ $\square$

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Corolario (Corolario 2)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, y sea $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ funciones mesurables, tales que $g \in L^1(\mu)$ y $|f| \leq g$ μ-c.t.p. Entonces $f \in L^1(\mu)$.

Prueba: Sabemos que $f^+, f^- \leq |f| \leq g$ μ-c.t.p. Por monotonicidad de la integral de Lebesgue, tenemos

$$\int f^+ \, d\mu \leq \int g \, d\mu < +\infty, \qquad \text{y} \qquad \int f^- \, d\mu \leq \int g \, d\mu < +\infty.$$

Luego, $f^+, f^- \in L^1(\mu)$, y por las condiciones de equivalencia de pertenencia a L^1, esto muestra que $f \in L^1(\mu)$. $\square$

Corolario (Corolario 3)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Si $f \in L^1(\mu)$, entonces f es $\mathbb{R}$-valuada μ-c.t.p. (Esto significa que $\{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) = +\infty$ ó $f(\mathbf{x}) = -\infty\} \subseteq A$, con $\mu(A) = 0$).

Además, existe una función $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{f} = f$ μ-c.t.p. con $\displaystyle\int \widetilde{f}\, d\mu = \int f\, d\mu$.

Prueba: Definimos $N = \{|f| = +\infty\} = \{f = +\infty\} \cup \{f = -\infty\}$. Observe que $N \in \mathcal{A}$ es mesurable (¿por qué?).

Vamos a mostrar que $\mu(N) = 0$. Para ello, observe que $N = \{|f| = +\infty\} = \displaystyle\bigcap_{k \geq 1} \{|f| \geq k\}$.

Por la Desigualdad de Markov, para cada $k \geq 1$

$$\mu(N) \leq \mu\big(\{|f| \geq k\}\big) \leq \tfrac{1}{k} \int |f|\, d\mu < +\infty.$$

Haciendo $k \to \infty$, tenemos $\mu(N) \leq \displaystyle\lim_{k \to \infty} \tfrac{1}{k} \int |f|\, d\mu = 0$. Esto muestra que $\mu(N) = 0$.

Conjuntos de Medida Nula

Ahora, definamos $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ por $\widetilde{f} = f \cdot \mathbf{1}_{N^c}$. Esto es

$$\widetilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{1}_{N^c}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{1}_{\{|f| \in \mathbb{R}\}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}; \\ 0, & f(\mathbf{x}) \in \{\pm\infty\}. \end{cases}$$

Como $\mu(N) = 0$, entonces $\widetilde{f} = f$ μ-c.t.p. y $\int \widetilde{f}\, d\mu = \int f\, d\mu$.