Integración de Funciones Mesurables

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 19) 10.abril.2023

Ejemplos

Ejemplo 1: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $\mathbf{x} \in X$, y sea $\mu = \delta_{\mathbf{x}}$, la medida de masa unitaria en $\mathbf{x}$. Para una función $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, ¿Cómo se calcula $\int f \, d\mu$?

Sea $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$, con representación estándar $f = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \mathbf{1}_{A_i}$.

Como $X = \bigcup A_i$, entonces $\mathbf{x}$ pertenece exactamente a uno de los $A_i \in \mathcal{A}$. Digamos, $\mathbf{x} \in A_{i_o}$. Entonces

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \mathbf{1}_{A_i}(\mathbf{x}) = c_{i_o} \, \mathbf{1}_{A_{i_o}} = c_{i_o}.$$

De ahí que

$$\int f \, d\delta_{\mathbf{x}} = I_{\delta_{\mathbf{x}}}(f) = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \delta_{\mathbf{x}}(A_i) = c_{i_o} \, \delta_{\mathbf{x}}(A_{i_o}) = c_{i_o} = f(\mathbf{x}).$$

Ejemplos

Tomemos ahora $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Por el Lema del Sombrero, existe una secuencia de funciones simples no-negativas $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$, tal que $f_n \nearrow f$. Del Teorema de Beppo Levi, tenemos

$$\begin{aligned} \int f\, d\delta_{\mathbf{x}} &= \int (\sup_n f_n)\, d\delta_{\mathbf{x}} = \sup_n \int f_n\, d\delta_{\mathbf{x}} = \sup_n f_n(\mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Portanto, $\displaystyle\int f\, d\delta_{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$. $\square$

Ejemplo 2: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$, y sea $\mu = \delta_{\mathbf{x}_1} + \delta_{\mathbf{x}_2}$. Calcular $\int f\, d\mu$, para $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$.

En el caso de una función simple $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$, con representación estándar $f = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i\, \mathbf{1}_{A_i}$.

Como $X = \bigsqcup A_i$, entonces $\mathbf{x}_j$ pertenece exactamente a uno de los $A_i \in \mathcal{A}$. Digamos, $\mathbf{x}_1 \in A_{i_1}$ y $\mathbf{x}_2 \in A_{i_2}$.

Entonces

$$f(\mathbf{x}_1) = \sum_{i=1}^{m} c_i\, \mathbf{1}_{A_i}(\mathbf{x}_1) = c_{i_1}, \qquad \text{y} \qquad f(\mathbf{x}_2) = \sum_{i=1}^{m} c_i\, \mathbf{1}_{A_i}(\mathbf{x}_2) = c_{i_2}.$$

De ahí que

$$\begin{aligned} \int f\, d\mu &= I_\mu(f) = \sum_{i=1}^{m} c_i\, \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i\, (\delta_{\mathbf{x}_1} + \delta_{\mathbf{x}_2})(A_i) = c_{i_1} + c_{i_2} \\ &= f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2). \end{aligned}$$

Ejemplos

Tomemos ahora $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$.

Al igual que en el ejemplo anterior, por el Lema del Sombrero, existe una secuencia de funciones simples no-negativas $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$, tal que $f_n \nearrow f$. Del Teorema de Beppo Levi, tenemos

$$\begin{aligned} \int f\,d\mu &= \int (\sup_n f_n)\,d\mu = \sup_n \int f_n\,d\mu = \sup_n \int f_n\,(\delta_{\mathbf{x}_1} + \delta_{\mathbf{x}_2}) \\ &= \sup_n \big(f_n(\mathbf{x}_1) + f_n(\mathbf{x}_2)\big) \end{aligned}$$

$$= f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2).$$

Portanto, $\int f\,d\mu = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2)$, para toda $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. $\square$

Ejemplo 3: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $\{\mathbf{x}_n\}_{n\geq 1} \subseteq X$, y sea $\mu = \sum\limits_{n\geq 1} \alpha_n\, \delta_{\mathbf{x}_n}$, $\alpha_n \geq 0$.

Calculamos $\int f\, d\mu$, para $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. En el caso de una función simple $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$, con representación estándar $f = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i\, \mathbf{1}_{A_i}$.

Supongamos que $\mathbf{x}_n \in A_{i_n}$. Para cada $n \geq 1$, tenemos $f(\mathbf{x}_n) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i\, \mathbf{1}_{A_i}(\mathbf{x}_n) = c_{i_n}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\int_X f\, d\mu &= I_\mu(f) = \sum_{i=1}^{m} c_i\, \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{n\geq 1} \alpha_n\, \delta_{\mathbf{x}_n}(A_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n\geq 1} \alpha_n\, \delta_{\mathbf{x}_n}(A_i) \\
&= \sum_{n\geq 1} \alpha_n \sum_{i=1}^{m} c_i\, \delta_{\mathbf{x}_n}(A_i) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n \underbrace{\sum_{i=1}^{m} c_i\, \mathbf{1}_{A_i}(\mathbf{x}_n)}_{f(\mathbf{x}_n)} = \sum_{n\geq 1} \alpha_n\, f(\mathbf{x}_n).
\end{aligned}
$$

Ejemplos

El Lema del Sombrero, garantiza que si $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, existe una secuencia $\{f_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$, con $f_k \nearrow f$. Del Teorema de Beppo Levi, tenemos

$$\begin{aligned}
\int f\, d\mu &= \int (\sup_k f_k)\, d\mu = \sup_k \int f_k\, d\mu = \sup_k \sum_{n\geq 1} \alpha_n f_k(\mathbf{x}_n) \\
&= \sum_{n\geq 1} \alpha_n \sup_k f_k(\mathbf{x}_n) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n f(\mathbf{x}_n).
\end{aligned}$$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Ejemplos

Ejemplo 4: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad discreta. Esto es, $\Omega = \{\omega_n\}_{n\geq 1}$, $\mathbb{P}(\omega_n) = p_n$ y $\displaystyle\sum_{n\geq 1} p_n = 1$.

En este caso, si $g = \sum_{i=1}^m c_i\, \mathbf{1}_{A_i} \in \mathcal{E}^+(\mathcal{F})$, para cada $n \geq 1$, tenemos $\displaystyle g(\omega_n) = \sum_{i=1}^m c_i\, \mathbf{1}_{A_i}(\omega_n) = c_{i_n}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g\, d\mathbb{P} &= I_{\mathbb{P}}(g) = \sum_{i=1}^m c_i\, \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^m c_i \sum_{n\geq 1} p_n\, \delta_{\omega_n}(A_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{n\geq 1} p_n\, \delta_{\omega_n}(A_i) \\
&= \sum_{n\geq 1} p_n \sum_{i=1}^m c_i\, \delta_{\omega_n}(A_i) = \sum_{n\geq 1} p_n \sum_{i=1}^m c_i\, \mathbf{1}_{A_i}(\omega_n) = \sum_{n\geq 1} p_n\, g(\omega_n).
\end{aligned}$$

En particular $\boxed{\displaystyle\int_\Omega g\, d\mathbb{P} = \sum_{n\geq 1} p_n\, g(\omega_n) = \mathbb{E}(g).}$

Ejemplos

El mismo argumento usado en los ejemplos anteriores (Lema del Sombrero + Beppo Levi), garantiza que para funciones mesurables no-negativas $g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{F})$, vale

$$\boxed{\int_\Omega g \, d\mathbb{P} = \sum_{n \geq 1} p_n \, g(\omega_n) = \mathbb{E}(g).}$$

¿Qué ocurre en el caso de distribuciones continuas? Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una v.a. continua, con distribución $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(-\infty, t)$, y si f_X es la función de densidad, entonces recordemos que $F = \mu = X_* \mathbb{P}$ es el pushforward de $\mathbb{P}$ bajo X.

Para $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función simple no-negativa, con representación estándar $g = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \mathbf{1}_{B_i}$, donde los $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Como $A_i = X^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}$ (pues X es v.a.), entonces

$$\int_\mathbb{R} g \, d\mu = I_\mu(g) = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \mathbb{P}\big(X^{-1}(B_i)\big) = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \mathbb{P}(A_i) = I_\mathbb{P}(g) = \int_\Omega g \, d\mathbb{P}.$$

Ejemplos

Observe además que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_X(g) &= \int_{\mathbb{R}} g(t)\, f_X(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, dF(t) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu = \sum_{i=1}^{m} c_i\, \mu(B_i) \\
&= \int_{\Omega} g\, d\mathbb{P}.
\end{aligned}
$$

El mismo argumento usado en los ejemplos anteriores (Lema del Sombrero + Beppo Levi), garantiza que para funciones mesurables no-negativas $g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{F})$, vale

$$
\boxed{\int_{\Omega} g\, d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, dF_X(t) = \mathbb{E}(g).}
$$

Integración de Funciones Mesurables

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Extendemos la integral de Lebesgue $\int \, d\mu$ de $\mathcal{M}^{(}\mathcal{A})$ a todo $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, recordemos que f admite siempre una descomposición en la forma

$$f = f^+ - f^-, \qquad \text{con } f^+, f^- \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A}).$$

Definición

*Diremos que la función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es μ-**integrable** si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y las siguientes integrales son finitas:*

$$\int f^+ \, d\mu < +\infty \qquad y \qquad \int f^- \, d\mu < +\infty.$$

*En este caso, definimos la **integral de Lebesgue** de f **con respecto de** μ como*

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \in \mathbb{R}.$$

Obs! Algunos autores (Schilling, por ejemplo) definen f μ-**integrable** si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y la diferencia $\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$ hace sentido. Esto es, no es $+\infty - \infty$.

En ese caso $\int f \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ y

$$\int f \, d\mu = \begin{cases} \underbrace{\int f^+ \, d\mu}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\int f^- \, d\mu}_{\in \mathbb{R}} = \in \mathbb{R} \\ \underbrace{\int f^+ \, d\mu}_{+\infty} - \underbrace{\int f^- \, d\mu}_{\in \mathbb{R}} = +\infty \\ \underbrace{\int f^+ \, d\mu}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\int f^- \, d\mu}_{-\infty} = -\infty \end{cases}$$

Definición

El espacio de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ que son μ-integrables se denota por $L_1(\mu)$ o $L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

Proposición

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *espacio de medida y sea* $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ *función mesurable. La integral de Lebesgue de* f *está bien definida. Esto es, si* $f = g_1 - h_1$ *y* $f = g_2 - h_2$*, con* $g_1, g_2, h_1, h_2 \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$*, entonces*

$$\int g_1\, d\mu - \int h_1\, d\mu = \int g_2\, d\mu - \int h_2\, d\mu.$$

Prueba: Si $f = g_1 - h_1 = g_2 - h_2$, entonces $g_1 + h_2 = g_2 + h_1$, y $g_1 + h_2, g_2 + h_1 \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Usando las propiedades de aditividad de la integral de Lebesgue en $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, tenemos

$$\int g_1\, d\mu + \int h_2\, d\mu = \int (g_1 + h_2)\, d\mu = \int (g_2 + h_1)\, d\mu = \int g_2\, d\mu + \int h_1\, d\mu.$$

Luego, $\int g_1\, d\mu - \int h_1\, d\mu = \int g_2\, d\mu - \int h_2\, d\mu.$ $\square$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ función mesurable. Las siguientes son equivalentes:

i) $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$,

ii) $f^+, f^- \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, *(exceptuando el caso $+\infty - \infty$)*,

iii) $|f| \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$,

iv) *existe* $w \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, *con* $w \geq 0$, *tal que* $|f| \leq w$.

Prueba: [$(i) \Leftrightarrow (ii)$] Es la definición de f ser función μ-integrable.

[$(ii) \Rightarrow (iii)$] Como $|f| = f^+ + f^-$, entonces por linealidad

$$\int f\, d\mu = \int (f^+ + f^-)\, d\mu = \int f^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu \leq \infty.$$

Esto muestra que $|f| \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

$[(iii) \Rightarrow (iv)]$ Basta tomar $w = |f| \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

$[(iv) \Rightarrow (ii)]$ Como $f^+, f^- \leq |f| \leq w$, y $w \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Por monotonicidad tenemos

$$\int f^+ \, d\mu, \ \int f^- \, d\mu \leq \int w \, d\mu \leq \infty,$$

lo que muestra que $f^+, f^- \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. $\square$

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Teorema (Propiedades de la integral de Lebesgue)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *espacio de medida y sean* $f, g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ *funciones* μ*-integrables,* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Entonces*

i) *(homogeneidad)* $\alpha f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ *y* $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$.

ii) *(linealidad)* $f + g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ *y* $\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.

iii) *(min-max)* $f \wedge g, f \vee g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, *y*

$$\int (f \wedge g) \, d\mu \leq \Big(\int f \, d\mu \Big) \wedge \Big(\int g \, d\mu \Big) \leq \Big(\int f \, d\mu \Big) \vee \Big(\int g \, d\mu \Big) \leq \int (f \vee g), d\mu.$$

iv) *(monotonicidad)* $f \leq g \;\Rightarrow\; \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

v) *(Cauchy-Schwarz) Si* $|f| \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, *entonces* $\big| \int f \, d\mu \big| \leq \int |f| \, d\mu$.

Prueba: Ejercicio!

Integración de Funciones Mesurables

Observaciones: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida.

- Excluyendo el caso $+\infty - \infty$, la integral de Lebesgue es lineal en $\mathcal{M}(\mathcal{A})$:
$$\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \in f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu.$$

- De (i) y (ii), $L^1(\mu)$ y $L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Además, el mapa de integración $\int \cdot\, d\mu : L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dado por
$$f \longmapsto \int f\, d\mu$$
es un funcinal lineal sobre $L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$.

- El espacio $L^1(\mu)$ es el primero de una familia de espacios más generales, llamados los espacios L^p, $p = 1, 2, 3, \ldots$ (**espacio de funciones** ***p*****-integrables**)
$$L^p(\mu) = \Big\{ f : X \to \mathbb{R},\ f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \ \text{ y } \int |f|^p\, d\mu < \infty \Big\}.$$

Ejemplo 1: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $\mathbf{x} \in X$, y sea $\mu = \delta_{\mathbf{x}}$, la medida de masa unitaria en $\mathbf{x}$. Recordemos que para una función $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, vale

$$\int f\, d\mu = \int f\, d\delta_{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}).$$

¿Cuáles son las funciones $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$?

¿Cuáles son las funciones $f \in L^1(\mu)$?

Observe que

$$\begin{aligned} f \in L^1(\mu) \quad &\iff \quad f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \ \text{ y } \int f < \infty \\ &\iff \quad f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \ \text{ y } \ f(\mathbf{x}) < \infty. \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Sea $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ un espacio de medida, donde $\mu = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \delta_n$, una medida "discreta". Recordemos que para una función $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, vale

$$\int f \, d\mu = \sum_{n \geq 1} \alpha_n f(n).$$

¿Cuáles son las funciones $f \in L^1(\mu)$? Observe que

$$\begin{aligned} f \in L^1(\mu) \quad &\iff \quad f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \text{ y } \int f < \infty \\ &\iff \quad f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \text{ y } \sum_{n \geq 1} \alpha_n f(n) < \infty. \end{aligned}$$

Cuando $\alpha_n = 1$, $\forall n$, tenemos $f \in L^1(\mu) \iff |f| \in L^1(\mu) \iff \sum_n |f(n)| < \infty$. Definimos

$$\ell^p(\mu) = \Big\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \int |f|^p \, d\mu = \sum_{n \geq 1} |f(n)|^p < \infty \Big\}.$$

y se llama el **espacio de secuencias p-sumables.**