Integración de Funciones Positivas

Alan Reyes-Figueroa

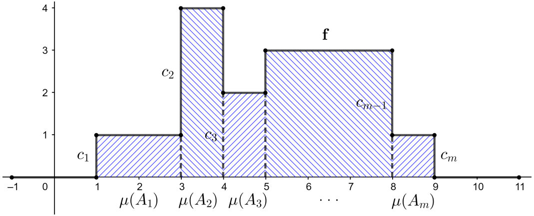
Teoría de la Medida e Integración (Aula 18) 22.marzo.2023

Integración de Funciones Simples

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Queremos medir el área bajo la curva de cualquier función $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Comenzaremos con el caso de las funciones simples no-negativas. Si $f \in \mathcal{E}^+$, ¿cómo medimos el área bajo la función f?

Sea $f = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathbf{1}_{A_i}$, una representación estándar para f, esto es, los $A_i \in \mathcal{A}$ son mesurables y disjuntos a pares, y $X = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$.



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Integración de Funciones Simples

Definición

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *espacio de medida, y sea* $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$*, con representación estándar* $f = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \mathbf{1}_{A_i}$*. Definimos la* ***integral*** *de* f ***con respecto de*** μ *(o la* μ***-integral*** *de* f*) por*

$$I_\mu(f) = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \mu(A_i) \in [0, +\infty].$$

Lema

Sean $f = \sum_{i=1}^{m} a_i \, \mathbf{1}_{A_i}$ *y* $f = \sum_{j=1}^{n} b_j \, \mathbf{1}_{B_j}$ *dos representaciones estándar distintas para* $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$*. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \, \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{n} b_j \, \mu(B_j).$$

Prueba: Como $X = \dot\bigcup_i A_i = \dot\bigcup_j B_j$, entonces

$$A_i = \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} (A_i \cap B_j), \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m; \qquad B_j = \dot{\bigcup_{i=1}^{m}} (A_i \cap B_j), \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Siendo μ aditiva, tenemos

$$\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j), \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m; \qquad \mu(B_j) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j), \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Por otro lado, los $A_i \cap B_j$ son disjuntos dos a dos. En el caso que $A_i \cap B_j \neq \varnothing$, tome $\mathbf{x} \in A_i \cap B_j$.
Tenemos

$$\begin{aligned} a_i &= a_i \, \mathbf{1}_{A_i}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} a_k \, \mathbf{1}_{A_k}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell \, \mathbf{1}_{B_\ell}(\mathbf{x}) = b_j \, \mathbf{1}_{B_j}(\mathbf{x}) \\ &= b_j. \end{aligned}$$

Integración de Funciones Simples

Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} a_i\,\mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{n} \mu(A_i\cap B_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i\,\mu(A_i\cap B_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_j\,\mu(A_i\cap B_j)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_j\,\mu(A_i\cap B_j) = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i\cap B_j) = \sum_{j=1}^{n} b_j\,\mu(B_j),\end{aligned}$$

y esto muestra que ambos cálculos de $I_\mu(f)$ coinciden, por lo que el valor de $I_\mu(f)$ está bien definido, e independe de la representación estándar. $\square$

Integración de Funciones Simples

Proposición

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, y sean $f, g \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$. Valen las siguientes propiedades:

i) $I_\mu(\mathbf{1}_A) = \mu(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

ii) *(homogeneidad positiva)* $I_\mu(cf) = c\, I_\mu(f)$, $\forall c > 0$.

iii) *(aditividad)* $I_\mu(f+g) = I_\mu(f) + I_\mu(g)$.

iv) *(monotonicidad) Si* $f \leq g$, *entonces* $I_\mu(f) \leq I_\mu(g)$.

Prueba: (i) Si $f = \mathbf{1}_A$, parar $A \in \mathcal{A}$, entonces f tiene representación estándar $f = \mathbf{1}_A = 1 \cdot \mathbf{1}_A + 0 \cdot \mathbf{1}_{A^c}$. Luego, de la definición de I_μ, tenemos que $I_\mu(f) = 1\, \mu(A) + 0 \cdot \mu(A^c) = \mu(A)$.

(ii) Sea $f = \sum_{i=1}^{m} a_i\, \mathbf{1}_{A_i}$ una representación estándar para f.

Integración de Funciones Simples

Entonces $cf = c\sum_{i=1}^{m} a_i\, \mathbf{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^{m} ca_i\, \mathbf{1}_{A_i}$. En particular,

$$I_\mu(cf) = \sum_{i=1}^{m} ca_i\, \mu(A_i) = c\sum_{i=1}^{m} a_i\, \mu(A_i) = c\, I_\mu(f).$$

(iii) Si $f = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{1}_{A_i}$ y $g = \sum_{i=1}^{n} b_j \mathbf{1}_{B_j}$, entonces $f+g = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a_i + b_j)\, \mathbf{1}_{A_i \cap B_j}$. Luego,

$$\begin{aligned}
I_\mu(f+g) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a_i+b_j)\,\mu(A_i\cap B_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i\,\mu(A_i\cap B_j) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_j\,\mu(A_i\cap B_j)\\
&= \sum_{i=1}^{m} a_i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mu(A_i\cap B_j)}_{\mu(A_i)} + \sum_{j=1}^{n} b_j \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \mu(A_i\cap B_j)}_{\mu(B_j)} = \sum_{i=1}^{m} a_i\,\mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} b_j\,\mu(B_j)\\
&= I_\mu(f) + I_\mu(g).
\end{aligned}$$

(iv) Si $g \geq f$, entonces $g - f \geq 0$, y por lo tanto $g - f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$.

Entonces podemos escribir $g = f + (g - f)$, con $f, g - f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$. Por la propiedad (iii) anterior, tenemos

$$I_\mu(g) = I_\mu(f) + \underbrace{I_\mu(g - f)}_{\geq 0} \geq I_\mu(f). \quad \square$$

Integración de Funciones Mesurables

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Queremos ahora extendeer la definición de integral, para el caso de funciones mesurables no-negativas $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$.

Definición

Sea $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Definimos la ***integral*** *de f* ***respecto de*** *μ por*

$$\int f\,d\mu = \sup\left\{ I_\mu(u) :\ u \leq f,\ u \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}) \right\}.$$

Notaciones:

- $\int f\,d\mu$, para dejar clara la medida μ, $\int f$ si no hay ambigüedad.
- Cuando se quiere dejar explítica la variable de integración

$$\int f(x)\,\mu(dx), \qquad \int f(x)\,d\mu(x), \qquad \int \mu(dx)\big(f(x)\big).$$

Obs! $\int f\,d\mu \in [0, +\infty]$.

Mostramos que este nuevo concepto de integral extiende a $I_\mu(f)$.

Lema

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *espacio de medida. Para toda* $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$*, vale* $\inf f\, d\mu = I_\mu(f)$.

Prueba: Sea $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$. Como $f \leq f$, entonces f es una de las funciones simples en el conjunto $\{u \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}) : u \leq f\}$. En particular,

$$\int f\, d\mu = \sup \{I_\mu(u) : \; u \leq f, \; u \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})\} \geq I_\mu(f).$$

Por otro lado, si $u \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ y $u \leq f$, por la monotonía de I_μ, tenemos que $I_\mu(u) \leq I_\mu(f)$. Tomando el supremo

$$\int f\, d\mu = \sup \{I_\mu(u) : \; u \leq f, \; u \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})\} \leq I_\mu(f).$$

Esto muestra que $\int f\, d\mu = I_\mu(f)$. $\square$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, y sean $f, g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Valen las siguientes propiedades:

i) $\int \mathbf{1}_A \, d\mu = \mu(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

ii) *(homogeneidad positiva)* $\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu$, $\forall c > 0$.

iii) *(aditividad)* $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.

iv) *(monotonicidad) Si* $f \leq g$, *entonces* $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

Prueba: (i) Si $f = \mathbf{1}_A$, entonces f es una función simple non-negativa, y del lema anterior tenemos que $\int f \, d\mu = I_\mu(f) = \mu(A)$, cuando $A \in \mathcal{A}$.

(ii) Si $c = 0$, entonces $\int cf \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0 = 0 \cdot \int f \, d\mu$. Consideremos el caso $c > 0$. Observe que si $u \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ y $u \leq cf$, entonces $\frac{1}{c}u \leq f$, y haciendo $v = \frac{1}{c}u$, tenemos que $v \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$, y $v \in f$.

Entonces, la homogeneidad se sigue de la propiedad de homogeneidad positiva de las integrales I_μ:

$$
\begin{aligned}
\int cf\,d\mu &= \sup\left\{I_\mu(u) : \; u \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}),\; u \leq cf\right\} = \sup\left\{I_\mu(u) : \; u \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}),\; \tfrac{1}{c}u \leq f\right\} \\
&= \sup\left\{I_\mu(cv) : \; v \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}),\; v \leq f\right\} = \sup\left\{c\, I_\mu(v) : \; v \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}),\; v \leq f\right\} \\
&= c \sup\left\{I_\mu(v) : \; v \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}),\; v \leq f\right\} = c \int f\,d\mu.
\end{aligned}
$$

(iii) Se sigue de la propiedad de aditividad de las integrales I_μ:

$$
\begin{aligned}
\int f\,d\mu + \int g\,d\mu &= \sup\left\{I_\mu(u) : \; u \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}),\; u \leq f\right\} + \sup\left\{I_\mu(v) : \; v \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}),\; v \leq g\right\} \\
&= \sup\left\{I_\mu(u) + I_\mu(v) : \; u, v \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}),\; u \leq f,\; v \leq g\right\} \\
&= \sup\left\{I_\mu(u+v) : \; u, v \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}),\; u + v \leq f + g\right\} = \int (f+g)\,d\mu.
\end{aligned}
$$

(iv) Sean $f, g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, con $f \leq g$. Entonces, toda función simple $u \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ que satisface $u \leq f$, también satisface $u \leq g$.

Esto implica que

$$\{I_\mu(u) : \; u \leq f, \; u \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})\} \subseteq \{I_\mu(u) : \; u \leq g, \; u \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})\}.$$

Tomando supremos sobre estos conjuntos,

$$\int f \, d\mu = \sup \{I_\mu(u) : \; u \leq f, \; u \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})\} \leq \sup \{I_\mu(u) : \; u \leq g, \; u \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})\} = \int g \, d\mu. \quad \square$$

Teorema (Teorema de Beppo Levi)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Para una secuencia no-decreciente de funciones mesurables positivas $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, con $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \ldots$. Entonces, el límite $f = \lim_n f_n = \sup_n f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Además,

$$\int (\sup_n f_n)\, d\mu = \int f\, d\mu = \sup_n \int f_n\, d\mu.$$

Equivalentemente,

$$\int (\lim_n f_n)\, d\mu = \int f\, d\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu.$$

Prueba: Ya vimos que el supremo de funciones mesurables no-negativas $f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, es de nuevo mesurable no-negativa. Entonces $\sup_n f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$.

Además, si $f, g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, con $f \leq g$, entonces por monotonicidad, $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$.

Afirmamos que $\sup_n \int f_n \, d\mu \leq \int (\sup_n f_n) \, d\mu$.

En efecto, para toda $k \geq 1$, se tiene que $f_k \leq \sup_n f_n$. Por monotonicidad, entonces $\int f_k \leq \int (\sup_n f_n)$. Tomando el supremo sobre todas las $k \geq 1$, vale

$$\sup_n \int f_n \, d\mu \leq \int (\sup_n f_n) \, d\mu.$$

Afirmamos ahora que si $u \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$, con $u \leq f$, entonces $I_\mu(f) \leq \sup_n \int f_n \, d\mu$.

Sea $u \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$, con $u \leq f$, y sea $\alpha \in (0, 1)$. Entonces, si $f = \sup_n f_n$,

$$\forall \mathbf{x} \in X, \ \exists N = N(\mathbf{x}, \alpha) \in \mathbb{N}, \ \text{tal que } \alpha \, u(\mathbf{x}) \leq f_n(\mathbf{x}), \ \forall n \geq N.$$

Para cada $n \geq 1$, tomamos el conjunto $B_n = \{\mathbf{x} \in X : \ \alpha', u(\mathbf{x}) \leq f_n(x)\}$. Los B_n son mesurables, ya que $B_n = \{\frac{f_n}{u} \geq \alpha\}$. Además, forman una secuencia creciente,

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \ldots \qquad \text{con } B_n \nearrow X.$$

Consideremos la función mesurable $\mathbf{1}_{B_n}$. Como $\alpha u \leq f_n$, entonces $\alpha u \mathbf{1}_{B_n} \leq f \mathbf{1}_{B_n}$.

Si $u = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \mathbf{1}_{A_i}$ es una representación para f, con $A_i \in \mathcal{A}$, entonces

$$\alpha \, u \, \mathbf{1}_{B_n} = \sum_{i=1}^{m} \alpha \, c_i \, \mathbf{1}_{A_i} \, \mathbf{1}_{B_n} = \sum_{i=1}^{m} \alpha \, c_i \, \mathbf{1}_{A_i \cap B_n},$$

de modo que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha \, c_i \, \mu(A_i \cap B_n) \leq I_\mu\big(\alpha \, u \, \mathbf{1}_{B_n}\big) = \int \alpha \, u \, \mathbf{1}_{B_n} \, d\mu \leq \int f_n \, \mathbf{1}_{B_n} \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu \leq \sup_n \int f_n \, d\mu.$$

Como esto vale para todo $n \geq 1$, y los $B_n \nearrow X$, tomando el límite cuando $n \to \infty$, tenemos que $\alpha \, u \, \mathbf{1}_{B_n} \to \alpha \, u \, \mathbf{1}_X = \alpha \, u$, y portanto

$$I_\mu\big(\alpha \, u\big) = I_\mu\big(\alpha \, u \, \mathbf{1}_X\big) \leq \sup_n \int f_n \, d\mu.$$

Finalmente, en el estimado anterior, tomando el supremo sobre todas las funciones $u \in \mathcal{E}^{+}(\mathcal{A})$, tales que

$$\int f = \sup \left\{ I_{\mu}(u) : \; f \in^{+} (\mathcal{A}), \; u \leq f \right\} \sup_{n} \int f_n \, d\mu.$$

Esto muestra que $\displaystyle\int (\sup_n f_n) \, d\mu \leq \sup_n \int f_n \, d\mu$.

Así, $\displaystyle\int (\sup_n f_n) \, d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu$. $\square$