Funciones Simples

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 17) 20.marzo.2023

Funciones Mesurables

Proposición

Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable. Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ son funciones mesurables, entonces $f \wedge g = \min\{f, g\}$ y $f \vee g = \max\{f, g\}$ son mesurables.

Prueba: Definimos las funciones $f \wedge g, f \vee g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ de manera puntual, por

$$(f \wedge g)(\mathbf{x}) = \min\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\}, \qquad (f \vee g)(\mathbf{x}) = \max\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\}.$$

Consideramos los conjuntos de la forma $\mathcal{G} = \{[a, \infty) : \ a \in \overline{\mathbb{R}}\}$. Como f y g son mesurables, para cada $a \in \overline{\mathbb{R}}$, los conjuntos $\{f \geq a\}$ y $\{g \geq a\}$ son mesurables (están en $\mathcal{A}$). De ahí que

- $\{f \wedge g \geq a\} = \{f \geq a\} \cap \{g \geq a\}$ es mesurable, por ser intersección de mesurables.
- $\{f \vee g \geq a\} = \{f \geq a\} \cup \{g \geq a\}$ es mesurable, por ser unión de mesurables.

Esto muestra que $f \wedge g$ y $f \vee g$ son funciones mesurables. $\square$

Corolario

Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable. Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función mesurable, entonces f^+ y f^- son mesurables.

Prueba: Recordemos que las funciones $f^+, f^- : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se definen por

$$f^+(\mathbf{x}) = \max\{f(\mathbf{x}), 0\} = \begin{cases} \mathbf{x}, & \mathbf{x} \geq 0; \\ 0, & \mathbf{x} < 0. \end{cases} \qquad f^-(\mathbf{x}) = \max\{-f(\mathbf{x}), 0\} = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} > 0; \\ -\mathbf{x}, & \mathbf{x} \leq 0. \end{cases}$$

Observe que 0, al ser una función constante, de modo que $\{0 \geq a\} = \varnothing$ ó $\{0 \geq a\} = X$, de modo que 0 es una función mesurable. De la propiedad anterior,tenemos que $f^+ = f \vee 0$ es mesurable. Similarmente, $f^- = (-f) \vee 0 = -(f \wedge 0)$ es mesurable. $\square$

Las funciones f^+ y f^- anteriores se llaman la **parte positiva** de f y la **parte negativa** de f, respectivamente.

Proposición

Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable. Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ son funciones mesurables, y $k \in \overline{\mathbb{R}}$, entonces $f + g$, kf, fg, f/g son mesurables. (Asumimos $g \neq 0$ en el caso de f/g).

Prueba:

i) En el caso $k = 0$, ya vimos que $kf = 0$ es una función constante, y portanto mesurable.
Si $k > 0$, entonces $\{kf \leq a\} = \{f \leq \frac{a}{k}\}$ es mesurable. Similarmente, $k < 0 \;\Rightarrow\; \{kf \leq a\} = \{f \geq \frac{a}{k}\}$ es mesurable. Esto muestra que kf es función mesurable.

ii) Observe que $\{f + g \leq a\} = \displaystyle\bigcup_{q,r \in \mathbb{Q}:\; q+r \leq a} \{f \leq q\} \cap \{g \leq r\}$. Entonces $\{f + g \leq a\}$ es mesurable, ya que es unión enumerable de mesurables, y portanto $f + g$ es función mesurable.

iii) La función f^2 es mesurable, ya que si $a \geq 0$, entonces

$$\{f^2 \leq a\} = \{-\sqrt{a} \leq f \leq \sqrt{a}\} = \{f \leq \sqrt{a}\} \cup \{f \geq -\sqrt{a}\}.$$

iv) Si f y g son mesurables, entonces como

$$fg = \tfrac{1}{2}\big((f+g)^2 - f^2 - g^2\big),$$

es suma de funciones mesurables (por (i-iii)), entonces gf es mesurable.

v) Finalmente, si $g \neq 0$, entonces

$$\{1/g \leq a\} = \begin{cases} \{1/a \leq g \leq 0\}, & a < 0; \\ \{g < 0\}, & a = 0; \\ \{g < 0\} \cup \{1/a < g\}, & a > 0. \end{cases}$$

En los tres casos, $\{1/g \leq a\}$ es mesurable, y portanto la función $1/g$ es mesurable. Luego, la propiedad del producto (iv) muestra que f/g es mesurable. $\square$

Funciones Mesurables

De forma crucial, la mesurabilidad se preserva por operaciones de límite en secuencias.

Proposición

Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable, y sea $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una secuencia de funciones mesurables. Entonces

$$\sup f_k, \qquad \inf f_k, \qquad \limsup_{k\to\infty} f_k, \qquad \liminf_{k\to\infty} f_k$$

son funciones mesurables.

Prueba: Para todo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ vale

$$\{\sup_k f_k \leq a\} = \bigcap_{k\geq 1}\{f_k \leq a\}, \qquad \{\inf_k f_k \leq a\} = \bigcup_{k\geq 1}\{f_k \leq a\},$$

de modo que $\sup_k f_k$ e $\inf_k f_k$ son mesurables.

Además, como $\limsup_{k\to\infty} = \inf_n \sup_{k\geq n} f_k$ y $\liminf_{k\to\infty} = \sup_n \inf_{k\geq n} f_k$, entonces también $\limsup_k f_k$ y $\liminf_k f_k$ son mesurables. $\square$

Funciones Mesurables

Corolario

Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable, y sea $f, f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una secuencia de funciones mesurables tal que $f_k \to f$ puntualmente. Entonces, f es mesurable.

Prueba: Si $f_k \to f$, entonces $f = \limsup_{k\to\infty} f_k = \liminf_{k\to\infty} f_k$, y por la proposición anterior, f es mesurable. $\square$

Si $(X, \mathcal{A})$ es espacio mesurable, hemos visto que las funciones mesurables en X forman un $\overline{\mathbb{R}}$-espacio vectorial (con la suma y producto escalar). Denotamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \mathcal{M}(\mathcal{A}) &= \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : \ f \text{ es función mesurable}\}.\\
\mathcal{M}^+ &= \mathcal{M}^+(\mathcal{A}) &= \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : \ f \text{ es función mesurable no-negativa}\}.\\
\mathcal{M}^- &= \mathcal{M}^-(\mathcal{A}) &= \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : \ f \text{ es función mesurable negativa}\}.
\end{aligned}$$

Funciones Simples

Definición

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable. Las funciones de la forma

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \mathbf{1}_{A_i}(\mathbf{x}), \qquad \text{con } m \in \mathbb{N},\ c_i \in \overline{\mathbb{R}},\ A_i \in \mathcal{A} \text{ disjuntos a pares}, \tag{1}$$

*se llaman **funciones simples**.*

Si tenemos

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \mathbf{1}_{B_i}(\mathbf{x}), \qquad \text{con } m \in \mathbb{N},\ c_i \in \overline{\mathbb{R}},\ B_i \in \mathcal{A},\ \text{y } X = \dot{\bigcup_{i=1}^{m}} B_i, \tag{2}$$

entonces decimos que f está en su **representación estándar**.

Obs! Las representaciones (1) y (2) no son únicas.

Funciones Simples

Ejemplo: Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable y $A, B \in \mathcal{A}$. Consideramos las particiones $P_A = \{A, A^c\}$ y $P_A = \{B, B^c\}$ de X. Entonces, la función constante 1 en X admite las representaciones estándar

$$\mathbf{1}_A(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_{A^c}(\mathbf{x}) = 1(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_B(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_{B^c}(\mathbf{x}).$$

Más aún, $1(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{A\cap B}(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_{A\cap B^c}(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_{A^c\cap B}(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_{A^c\cap B^c}(\mathbf{x})$.

Lema

Sea $(X, \mathcal{A})$ *espacio mesurable, y sean* $A, B \in \mathcal{A}$*. Entonces:*

- $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A-B} + 2\,\mathbf{1}_{A\cap B} + \mathbf{1}_{B-A}$.
- $\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\cap B}$.

Si $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$*, entonces*

- $a\,\mathbf{1}_A + b\,\mathbf{1}_B = a\,\mathbf{1}_{A-B} + (a+b)\,\mathbf{1}_{A\cap B} + b\,\mathbf{1}_{B-A}$.
- $a\,\mathbf{1}_A \cdot b\,\mathbf{1}_B = ab\,\mathbf{1}_{A\cap B}$.

Prueba Ejercicio! $\square$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable. Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ son funciones simples, y $k \in \overline{\mathbb{R}}$, entonces $f + g$, kf, fg, f/g son simples. (Asumimos $g \neq 0$ en el caso de f/g).

Prueba: Sean $f = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{1}_{A_i}$, $\sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{1}_{B_j}$ representaciones estándar para f y para g, respectivamente. Esto es $\{A_i\}_{i=1}^m$ es partición de X; similarmente, $\{B_j\}_{j=1}^n$ es partición de X.

Del lema anterior, tenemos

i) $kf = \sum_{i=1}^{m} (ka_i) \mathbf{1}_{A_i}$, es función simple.

ii) $f + g = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{1}_{B_j}$, es función simple.

iii) $fg = \Big(\sum_{i=1}^{m} a_i \,\mathbf{1}_{A_i}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j \,\mathbf{1}_{B_j}\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \,\mathbf{1}_{A_i \cap B_j}$, es función simple.

iv) Si $g \neq 0$, entonces cada $b_j \neq 0$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces $\frac{1}{g} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_j} \mathbf{1}_{B_j}$ es de nuevo una función simple. Consecuentemente, la propiedad del producto (iii) implica que

$$\frac{f}{g} = \Big(\sum_{i=1}^{m} a_i \,\mathbf{1}_{A_i}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{b_j} \mathbf{1}_{B_j}\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i}{b_j} \mathbf{1}_{A_i \cap B_j},$$

es función simple. $\square$

Funciones Simples

Si $(X, \mathcal{A})$ es espacio mesurable, hemos visto que las funciones simples en X forman un $\overline{\mathbb{R}}$-espacio vectorial (con la suma y producto escalar). Denotamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{A}) &= \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ es función simple}\}. \\
\mathcal{E}^+ = \mathcal{E}^+(\mathcal{A}) &= \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ es función simple no-negativa}\}. \\
\mathcal{E}^- = \mathcal{E}^-(\mathcal{A}) &= \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ es función simple negativa}\}.
\end{aligned}$$

Teorema

Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable. Toda función simple $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es mesurable.

Prueba: Ver ejemplo 2 del aula anterior. $\square$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable. Toda función mesurable $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ que toma un número finito de valores, es simple.

Prueba: Sea $I = \text{Im}(f) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \subset \overline{\mathbb{R}}$. Los $\{f = a\} = \{f \geq a\} - \{f > a\} \in \mathcal{A}$, pues f es mesurable. Como f es función, $\{f = y_i\} \cap \{f = y_j\} = \varnothing$ para $i \neq j$. De ahí que

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{a \in I} a \cdot \mathbf{1}_{\{f=a\}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} y_i \, \mathbf{1}_{\{f=y_i\}}(\mathbf{x}).$$

Como $X = \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} \{f = y_i\}$, entonces f es una función simple. $\square$

Teorema (Lema del Sombrero (*Sombrero Lemma*))

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable. Toda función mesurable, no-negativa, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es el límite de una secuencia creciente de funciones simples $\{f_n\}_{n\geq 1}$, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Esto es, $f_n \nearrow f$, y

$$f(\mathbf{x}) = \sup_n f_n(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x}), \qquad \forall \mathbf{x} \in X.$$

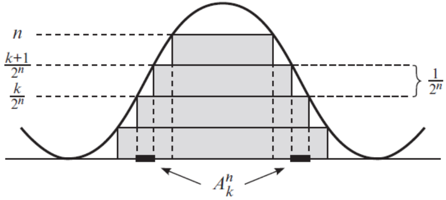
Esquema de Prueba: Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos los conjuntos de nivel

$$A_k^{(n)} = \begin{cases} \left\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\right\}, & \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, n2^n - 1; \\ \left\{f \geq n\right\}, & \text{para } k = n2^n. \end{cases}$$

Funciones Simples

- Las $\{f_n\}$ forman una cadena ascendente $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \ldots$.
- $|f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \frac{1}{2^n}$, para $\mathbf{x} \in \{f \leq n\}$. En particular, $f_n(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x})$, para $\mathbf{x} \in \{f \leq n\}$.

- Los $A_k^{(n)} = \{\frac{k}{2^n} \leq f\} \cap \{f < \frac{k+1}{2^n}\} \in \mathcal{A}$. El complemento $A_{n2^n}^{(n)} = \{f \geq n\} \in \mathcal{A}$. Además, $\overline{\mathbb{R}} = \bigcup_{k=0}^{n2^n} A_k^{(n)}$.
- Lo anterior muestra que si $f(\mathbf{x}) < \infty$, entonces $\mathbf{x} \in \{f \leq n\}$, para cada $n \geq f(\mathbf{x})$. De modo que $f_n(\mathbf{x}) \nearrow f(\mathbf{x})$.
- F inalmente, para $f(\mathbf{x}) = +\infty$, entonces la secuencia $f_n(\mathbf{x}) = n \nearrow f(\mathbf{x})$.



Sumando todo lo anterior, obtenemos $f_k \nearrow f$. $\square$