Funciones Mesurables

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 16) 15.marzo.2023

Borelianos Extendidos

Considere la recta real extendida $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\ +\infty\} = [-\infty,\ +\infty]$.

$\overline{\mathbb{R}}$ hereda las propiedades de $\mathbb{R}$, más dos propiedades adicionales:

- $-\infty < t$, $\forall t \in \mathbb{R}$;
- $t < -\infty < t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Tenemos operaciones aritméticas en $\overline{\mathbb{R}}$ que extienden a la $+$ y $\cdot$ de $\mathbb{R}$:

$+$	0	y	$-\infty$	$+\infty$
0	0	y	$-\infty$	$+\infty$
x	x	$x+y$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$

$\cdot$	0	$\pm y$	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	0
$\pm x$	0	$\pm xy$	$\mp\infty$	$\pm\infty$
$-\infty$	0	$\mp\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	0	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Obs! $\overline{\mathbb{R}}$ no es un cuerpo! Las cantidades $+\infty - \infty$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ no están definidas.

Borelianos Extendidos

Extendemos los borelianos a $\overline{\mathbb{R}}$ de la siguiente forma. Definimos $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ por

$$B^* \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \iff B^* = B \cup S, \text{ donde } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ y } S \in \{\varnothing, \{-\infty\}, \{+\infty\}, \{\pm\infty\}\}.$$

Proposición

$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ es una σ-álgebra, y su traza respecto de $\mathbb{R}$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Proposición

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \cap \mathbb{R} = \{A \cap \mathbb{R} : \ A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\}$.

Lema

$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ es generada por cualquiera de las siguientes colecciones:

- $\mathcal{G} = \{[a, +\infty] : \ a \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{G} = \{(a, +\infty] : \ a \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{G} = \{[-\infty, a] : \ a \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{G} = \{[-\infty, a) : \ a \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{G} = \{[a, +\infty] : \ a \in \mathbb{Q}\}$,
- $\mathcal{G} = \{(a, +\infty] : \ a \in \mathbb{Q}\}$,
- $\mathcal{G} = \{[-\infty, a] : \ a \in \mathbb{Q}\}$,
- $\mathcal{G} = \{[-\infty, a) : \ a \in \mathbb{Q}\}$.

Borelianos Extendidos

Prueba: Mostramos que $\mathcal{G} = \{[a, +\infty] : \; a \in \mathbb{R}\}$ genera a los borelianos $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Tomamos $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G}) = \sigma\big([a, +\infty] : \; a \in \mathbb{R}\big)$.
Como $[a, +\infty] = \underbrace{[a, +\infty)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \cup \underbrace{\{+\infty\}}_{\in S} \; \Rightarrow [a, +\infty] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Así, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \; \Rightarrow \; \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Además,

$$\{+\infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [k, +\infty], \qquad \{-\infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [-\infty, -k].$$

Esto muestra que $\{-\infty\}, \{+\infty\} \in (\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Entonces, $\sigma(\mathcal{G})$ contiene a todos los conjuntos de la forma $B \cup S$, donde $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $S \in \{\varnothing, \{-\infty\}, \{+\infty\}, \{\pm\infty\}\}$.

Esto muestra que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subseteq \sigma(\mathcal{G})$.

Ejemplos

Ejemplo 1: Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable. Entonces, la función indicadora $\mathbf{1}_A(\mathbf{x}) : X \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{1}_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in A; \\ 0, & \mathbf{x} \notin A. \end{cases},$$

en mesurable $\iff A \in \mathcal{A}$.

En efecto, consideramos el generador $\mathcal{G} = \{[a, \infty) : \; a \in \mathbb{R}\}$ de los borelianos $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Analizamos el conjunto $\{\mathbf{1}_A \geq a\}$:

$$\{\mathbf{1}_A(\mathbf{x}) \geq a\} = \begin{cases} \emptyset, & a > 1; \\ A, & 0 < a \leq 1; \\ X, & a \leq 0. \end{cases}$$

En particular, $\{\mathbf{1}_A \geq a\} \in \mathcal{A}$ es mesurable, para todo $a \in \mathbb{R}$. Esto muestra que si $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \mathbf{1}_A$ es mesurable.

Un argumento similar muestra que si $A \notin \mathcal{A}$, no siempre el conjunto $\{\mathbf{1}_A \geq a\}$ es mesurable.

Ejemplos

Ejemplo 2: Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable, y consideremos $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$, conjuntos disjuntos a pares. Sean $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$.
La función $f : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \mathbf{1}_{A_i}(\mathbf{x}),$$

es mesurable.

Observe que, para cualquier $a \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\{f \geq a\} = \{\mathbf{x} \in : \; f(\mathbf{x}) \geq a\} = \bigcup_{c_i \geq a} A_i \in \mathcal{A},$$

ya que es una unión finita (posiblemente vacía) de conjuntos mesurables.

Las funciones de la forma anterior se llaman **funciones simples**. Analizaremos con detalle estas funciones en la próxima aula.

Ejemplos

Ejemplo 3: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria.

Consideremos la medida push-forward generada por $\mathbb{P}$ sobre los borelianos de $\mathbb{R}$ por X: $\mu = X_*\mathbb{P}$, dada por

$$\mu(B) = \mathbb{P}\big(X^{-1}(B)\big), \quad \text{para } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Tomemos un rayo $B = (-\infty, t] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La medida μ en B es

$$\mu(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X^{-1}(-\infty, t]) = \mathbb{P}[X \leq t].$$

Observe que μ satisface las siguientes propiedades:

- $0 \leq \mu(-\infty, t] \leq 1$.
- μ es no-decreciente: $s \leq t \;\Rightarrow\; \mu(-\infty, s] \leq \mu(-\infty, t]$.
- $\lim\limits_{t \to -\infty} \mu(-\infty, t] = 0$ y $\lim\limits_{t \to +\infty} \mu(-\infty, t] = 1$.
- μ es continua a la derecha: $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$t < x < t + \delta \;\Rightarrow\; \mu(-\infty, x]) - \mu(-\infty, t]) < \varepsilon.$$

Ejemplos

Probamos la propiedad de semi-continuidad a la derecha:

Consideremos la secuencia de borelianos $A_k = (-\infty, t + \frac{1}{k}]$, $k \geq 1$. Observe que esta es una secuencia decreciente

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$

Como $\mu =_* \mathbb{P}$ es una medida finita (ya que $\mathbb{P} \leq 1$, entonces

$$A_k \searrow (-\infty, t] \;\Rightarrow\; \mu(A_k) \searrow \mu(-\infty, t].$$

En particular, para todo > 0, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \implies \mu(A_n) - \mu(-\infty, t] < \varepsilon.$$

Haciendo $\delta = \frac{1}{n_0}$, tenemos que si $t < x < t + \delta$, entonces $(-\infty, t] \subseteq (-\infty, x] \subseteq (-\infty, t+\delta]$. En particular

$$\mu(-\infty, x] - \mu(-\infty, t] \leq \mu(-\infty, t+\delta] - \mu(-\infty, x] = \mu(A_{n_0}) - \mu(-\infty, x] < \varepsilon.$$

Ejemplos

Vale también
$$\mathbb{P}[a < X \leq b] = \mu(-\infty, b]) - \mu(-\infty, a]) = \mu(a, b].$$

Lo que estamos observando aquí son las propiedades de una función de distribución.

De hecho, la **función de distribución** de X se define como

$$F_X(t) = \mathbb{P}[X \leq t] = \mu(-\infty, t).$$

Así, la función de distribución F_X no es otra cosa que la medida push-forward de $\mathbb{P}$ bajo la variable aleatoria X en consideración.