Mapas y Funciones Mesurables

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 15) 13.marzo.2023

Definición

*Sean $(X, \mathcal{A})$ y $(Y, \mathcal{B})$ espacios mesurables. Decimos que un mapa $T : X \to Y$ es **mesurable** (respecto de las σ-álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$) si $T^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$. Esto es,*

$$T^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad \textit{para todo } B \in \mathcal{B}.$$

*En el caso particular en que $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces T se llama un mapa **Borel-mesurable**.*

Lemma

Sean $(X, \mathcal{A})$ y $(Y, \mathcal{B})$ espacios mesurables, con $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G})$, donde $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ es algún conjunto generador. Entonces, $T : X \to Y$ es mesurable $\iff$ para tod $G \in \mathcal{G}$, $T^{-1}(G) \in \mathcal{A}$. (En otras palabras, es suficiente verificar la definición para aquellos conjuntos en el generador $\mathcal{G}$).

Prueba: $(\Rightarrow)$ Si $T : X \to Y$ es mesurable, entonces por definición $T^{-1}(G) \in \mathcal{A}$, para todo $G \in \mathcal{B}$, en particular, para todo $G \in \mathcal{G}$.

$(\Leftarrow)$ Consideremos la colección de subconjuntos de Y

$$\mathcal{S} = \{B \subseteq Y : \; T^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Observe que

- $\varnothing \in \mathcal{S}$, ya que $T^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{A}$.
- Si $B \in \mathcal{S}$, entonces $A = T^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Luego, $T^{-1}(B^c) = T^{-1}(B)^c = A^c \in A$, lo que implica que $B^c \in \mathcal{S}$.

- Si $\{B_k\}_{k\geq 1} \in \mathcal{S}$ es una secuencia de elementos en $\mathcal{S}$, entonces $A_k = T^{-1}(B_k) \in \mathcal{A}$, para todo $k \geq 1$. Como $\mathcal{A}$ es σ-álgebra, entonces $T^{-1}\big(\bigcup_k B_k\big) = \bigcup_k T^{-1}(B_k) = \bigcup_k A_k \in \mathcal{A}$, de modo que $\bigcup_k B_k \in \mathcal{S}$.

Lo anterior muestra que $\mathcal{S}$ es una σ-álgebra en Y.

Por hipótesis, $T^{-1}(G) \in \mathcal{A}$, $\forall G \in \mathcal{G}$. Luego, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{S} \Rightarrow \; \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{S}, \Rightarrow \; T^{(}\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$, lo que prueba que T es mesurable. $\square$

Obs! Si $(X, \mathcal{O})$ es un espacio topológico ($\mathcal{O}$ = abiertos), y consideramos la -álgebra de Borel $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O})$, nos gustaría establecer una relación entre los mapas continuos y los mapas mesurables.

Corolario

Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ espacios topológicos, y consideremos los espacios mesurables $(X, \mathcal{B}(X))$, $(Y, \mathcal{B}(Y))$. Entonces, todo mapa continuo $T : X \to Y$, es un mapa mesurable.

Mapas Mesurables

Prueba: Como $T : X \to Y$ es continuo, entonces $T^{-1}(\mathcal{O}_Y) \subseteq \mathcal{O}_X$. Luego, $T^{-1}(\mathcal{O}_Y) \subseteq \mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{B}(X)$. Como los abiertos $\mathcal{O}_Y$ generan a $\mathcal{B}(Y)$, por el lema anterior, tenemos que $T^{-1}(\mathcal{B}(Y)) \subseteq \mathcal{B}(X)$, y T es un mapa mesurable. $\square$

Comentario: No todo mapa mesurable es un mapa continuo.

Ejemplo: Tome $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (aquí consideramos las σ-álgebras de Borel en $\mathbb{R}$),

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & -1 \leq \mathbf{x} \leq 1; \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Analizamos las posibles preimágenes por T, de cualquier intervalo abierto $[-\infty, y)$:

- Si $y \leq 0$, entonces $T^{-1}(a, b) = \varnothing \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- Si $0 < y \leq 1$, entonces $T^{-1}(a, b) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- Si $1 < y$, entonces $T^{-1}(a, b) = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Esto abarca todas las posibilidades $\Rightarrow$ T es mesurable. Pero T no es continua.

Propiedades

Proposición

Sean $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B}), (Z, \mathcal{C})$ espacios mesurables. Si $T_1 : X \to Y$ y $T_2 : Y \to Z$ son mapas mesurables, entonces $T_2 \circ T_1 : X \to Z$ es mesurable.

Prueba: Sea $C \in \mathcal{C}$. Como T_2 es mesurable, entonces $B = T_2^{-1}(C) \in \mathcal{B}$. Como T_1 es mesurable, entonces $A = T_1^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Pero $A = T_1^{-1}(B) = T_1^{-1}(T_2^{-1}(C)) = (T_2 \circ T_1)^{-1}(C)$, lo que muestra que $T_2 \circ T_1$ es mapa mesurable. $\square$

Dado un espacio mesurable $(Y, \mathcal{B})$ y dado $T : X \to Y$, en ocasiones podemos no tener referencia de una Σ-álgebra en X. Nos gustaría construir alguna σ-álgebra $\mathcal{A}$ en X para la cual T resulta ser mesurable.

- Obviamente, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ hace que T y cualquier otro mapa de X a Y sean mesurables.

Pero, ¿es posible construir una menor σ-álgebra para que T sea mesurable?

- En este caso, la **menor** σ-álgebra en X para la cual T es mesurable es $\mathcal{A} = \sigma(T^{-1}(\mathcal{B}))$.

Propiedades

Ahora, suponga que $\{(X_i, \mathcal{A}_i)\}_{i\in I}$ es una colección de espacios mesurables. Dados mapas $T_i : X \to X_i$.

¿Cuál es la menor σ-álgebra en X que hace que todos los T_i sean mapas mesurables, simultáneamente?

- Respuesta: $\mathcal{A} = \sigma\big(\bigcup_i T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\big)$.

Definición

$\mathcal{A} = \sigma\big(\bigcup_i T_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\big)$ *se llama la* σ***-álgebra generada*** *por los mapas* T_i.

Teorema

Sean $(X, \mathcal{A})$ y $(Y, \mathcal{B})$ espacios mesurables, $T : X \to Y$ un mapa mesurable, y sea μ una medida sobre $\mathcal{A}$. Entonces, podemos construir una medida $T_*\mu$ en $\mathcal{B}$, dada por

$$T_*\mu(B) = \mu\big(T^{-1}(B)\big).$$

Prueba: Observe que al ser T un mapa mesurable, entonces $T_*\mu$ aplica sobre conjuntos válidos. Mostramos que $T_*\mu$ es una medida.

- $T_*\mu(\varnothing) = \mu(T^{-1}(\varnothing)) = \mu(\varnothing) = 0$.
- Sea $\{B_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ una secuencia de conjuntos disjuntos a pares en $\mathcal{B}$. Entonces las preimágenes $\{T^{-1}(B_k)\}_{k\geq 1}$ también forman una secuencia de conjuntos disjuntos a pares en $\mathcal{A}$, pues $T^{-1}(B_i) \cap T^{-1}(B_j) = T^{-1}(B_i \cap B_j) = \varnothing,\;$ para $i \neq j$. Luego,

$$T_*\mu\Big(\dot\bigcup_{k\geq 1} B_k\Big) = \mu\Big(T^{-1}\Big(\dot\bigcup_{k\geq 1} B_k\Big)\Big) = \mu\Big(\dot\bigcup_{k\geq 1} T^{-1}(B_k)\Big) = \sum_{k\geq 1} \mu(T^{-1}(B_k)) = \sum_{k\geq 1} T_*\mu(B_k).$$

Lo anterior muestra que T_*mu es una medida. $\square$

Propiedades

Teorema

Sean $(X, \mathcal{A})$ y $(Y, \mathcal{B})$ espacios mesurables, $T : X \to Y$ un mapa arbitrario, y sea μ una medida sobre $\mathcal{B}$, y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra contenida en $T^{-1}(\mathcal{B})$. Entonces, podemos construir una medida $T^*\mu$ en $\mathcal{A}$, dada por

$$T^*\mu\big(T^{-1}(B)\big) = \mu(B).$$

Prueba: Mostramos que $T^*\mu$ es una medida.

- $T^*\mu(\varnothing) = T^*\mu(T^{-1}(\varnothing)) = \mu(\varnothing) = 0$.
- Sea $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ una secuencia de conjuntos disjuntos a pares en $\mathcal{A} \subseteq T^{-1}(\mathcal{B})$. Entonces los $A_k = T^{-1}(B_k)$ son preimágenes de conjuntos disjuntos en $\mathcal{B}$. Luego,

$$\begin{aligned} T^*\mu\Big(\dot{\bigcup_{k\geq 1}} B_k\Big) &= T^*\mu\Big(\dot{\bigcup_{k\geq 1}} T^{-1}(B_k)\Big) = T^*\mu\Big(T^{-1}\Big(\dot{\bigcup_{k\geq 1}} A_k\Big)\Big) = \mu\Big(\dot{\bigcup_{k\geq 1}} B_k\Big) \\ &= \sum_{k\geq 1} \mu(B_k) = \sum_{k\geq 1} T^*\mu(A_k). \end{aligned}$$

Definición

*La medida T_* definida sobre $\mathcal{B}$ se llama el **push-forward** de μ por T.*

Notación: $T_*\mu$, $T_\sharp\mu$, $T \circ \mu$, $\mu \circ T^{-1}$.

Definición

*La medida T^* definida sobre $\mathcal{A} \subseteq T^{-1}(\mathcal{B})$ se llama el **pull-back** de μ por T.*

Notación: $T^*\mu$, μ_T.

Definición

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable. Una ***función mesurable*** *$u : X \to \mathbb{R}$ es cualquier mapa mesurable μ entre $(X, \mathcal{A})$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

Nota: En el caso en que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ corresponde a un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una función mesurable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se llama una **variable aleatoria**.

Funciones Mesurables

En otras palabras, una función $\mu : X \to \mathbb{R}$ es mesurable $\iff$ $u^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Como ya hemos visto, para verificar que $\mu : X \to \mathbb{R}$ es una función mesurable, basta verificar que $u^{-1}(G) \in \mathcal{A}$, para todo $G \in \mathcal{G}$, donde $\mathcal{G}$ es cualquier conjunto generados para los borelianos $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Recordemos que existen varios generadores para $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

- $\mathcal{G} = \{[a, \infty) : \ x \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{G} = \{(a, \infty) : \ x \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{G} = \{(-\infty, a) : \ x \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{G} = \{(-\infty, a] : \ x \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{G} = \{[a, \infty) : \ x \in \mathbb{Q}\}$,
- $\mathcal{G} = \{(a, \infty) : \ x \in \mathbb{Q}\}$,
- $\mathcal{G} = \{(-\infty, a) : \ x \in \mathbb{Q}\}$,
- $\mathcal{G} = \{(-\infty, a] : \ x \in \mathbb{Q}\}$.

Usando $\mathcal{G}$, para verificar que $u : X \to \mathbb{R}$ es mesurable, bastaría verificar que

$$u^{-1}((-\infty, a]) = \{x \in X : \ u(x) \in (-\infty, a]\} = \{x \in X : \ u(x) \leq a\} = \{u \leq a\} \in \mathcal{A}, \ \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Funciones Mesurables

Notaciones:

- $\{u \leq a\} = \{x \in X : \; u(x) \leq a\} = u^{-1}\big((-\infty, a]\big)$,
- $\{u < a\} = \{x \in X : \; u(x) < a\} = u^{-1}\big((-\infty, a)\big)$,
- $\{u \geq a\} = \{x \in X : \; u(x) \geq a\} = u^{-1}\big([a, \infty)\big)$,
- $\{u > a\} = \{x \in X : \; u(x) > a\} = u^{-1}\big((a, \infty)\big)$.

Si $u : X \to \mathbb{R}$, y $v : X \to \mathbb{R}$ son ambas funciones, denotamos

- $\{u \leq v\} = \{x \in X : \; u(x) \leq v(x)\}$,
- $\{u < v\} = \{x \in X : \; u(x) < v(x)\}$,
- $\{u \geq v\} = \{x \in X : \; u(x) \geq v(x)\}$,
- $\{u > v\} = \{x \in X : \; u(x) > v(x)\}$,
- $\{u = v\} = \{x \in X : \; u(x) = v(x)\}$.

Funciones Mesurables

Lema

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable. Las siguientes son equivalentes:

i) $u : X \to \mathbb{R}$ *es mesurable,*

ii) $\{u \leq a\} \in \mathcal{A}$, *para todo* $a \in \mathbb{R}$,

iii) $\{u < a\} \in \mathcal{A}$, *para todo* $a \in \mathbb{R}$,

iv) $\{u \geq a\} \in \mathcal{A}$, *para todo* $a \in \mathbb{R}$,

v) $\{u > a\} \in \mathcal{A}$, *para todo* $a \in \mathbb{R}$.

Prueba: *Consecuencia del lema sobre generadores* $\mathcal{G}$ *de los borelianos* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$.

(Existe una versión idéntica al lema, pero verificando sobre todo $a \in \mathbb{Q}$.*)*