Teorema de Existencia de Extensiones

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 14) 08.marzo.2023

Existencia de Medidas

Necesitamos un mecanismo para construir medidas:

1) Definir μ sobre un conjunto generador $\mathcal{S}$ (μ pre-medida en $\mathcal{S}$).
2) Extender exta pre-medida a todo $\sigma(\mathcal{S})$ de forma coherente. Y si μ y $\mathcal{S}$ se satisfacen las condiciones del Teorema de Unicidad de Medidas, dicha extensión es única.

Recordemos que una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X es un **semi-anillo** si satisface:

i) $\varnothing \in \mathcal{F}$.
ii) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$.
iii) Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces existen $S_1, S_2, \ldots, S_n$ in $\mathcal{F}$, disjuntos a pares, tales que $A - B = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} S_k$.

Nota: Se llama semi-anillo porque la estructura $(\mathcal{P}(X), \cap, -)$ forma una estructura algebraica que comparte las propiedades de un anillo, excepto que $-$ no es asociativa. Por otro lado, la estructura $(\mathcal{P}(X), \cap, \Delta)$ sí es un anillo (conmutativo con identidad).

Teorema (Teorema de Extensión de Carathéodory)

Sea X conjunto no vacío, y sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un semi-anillo. Sea $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ una pre-medida en $\mathcal{S}$, esto es:

i) $\mu(\varnothing) = 0$,

ii) *para* $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{S}$, *disjuntos a pares, vale* $\mu\Big(\dot{\bigcup\limits_{k\geq 1}} A_k\Big) = \sum\limits_{k\geq 1} \mu(A_k)$.

Entonces, μ posee una extensión a una medida μ en $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$.

Si, además, $\mathcal{S}$ posee una secuencia exhaustiva $S_k \nearrow X$, tal que $\mu(S_k) < \infty$, $\forall k \geq 1$, entonces dicha extensión es única.

Teorema de Extensión

Idea de la Prueba: El punto clave a resolver es ¿cómo extender una pre-medida en $\mathcal{S}$ a una medida en $\sigma(\mathcal{S})$?

Para cada $A \subseteq X$, consideramos la familia de $\mathcal{S}$-coberturas enumerables de A:

$$\mathcal{C}(A) = \Big\{ \{S_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{S} : \ A \subseteq \bigcup_k S_k \Big\}.$$

Si A no admite coberturas enumerables en $\mathcal{S}$, entonces definimos $\mathcal{C}(A) = \varnothing$.

Definimos la función $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, por

$$\mu^*(A) = \inf \Big\{ \sum_{k\geq 1} \mu(S_k) : \ \{S_k\}_{k\geq 1} \in \mathcal{C}(A) \Big\}.$$

Cuando $\mathcal{C}(A) = \varnothing$, definimos $\mu^*(A) = \inf \varnothing = \infty$.

La prueba del Teorema de Carathéodory se resumen en 4 pasos:

Teorema de Extensión

(1) Mostrar que μ^* es una medida exterior:

- $\mu^*(\varnothing) = 0$,
- $A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,
- μ^* es σ-subaditiva: $\mu^*\Big(\bigcup_k A_k\Big) \leq \sum_{k \geq 1} \mu^*(A_k)$.

(2) Mostrar que μ^* extiende a μ, esto es $\mu^*\big|_{\mathcal{S}} = \mu$.

(3) Definir conjuntos μ^*-mesurables, mediante la condición de Carathéodory:

$$\mathcal{A}^* = \{A \subseteq X : \; \mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A), \forall Q \subseteq X\}.$$

(4) Mostrar que $\mu^*\big|_{\mathcal{A}^*}$ es una medida en $\mathcal{A}^*$.

Prueba del Teorema

Prueba: Definimos la función $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, por

$$\mu^*(A) = \inf \Big\{ \sum_{k\geq 1} \mu(S_k) : \ \{S_k\}_{k\geq 1} \in \mathcal{C}(A) \Big\},$$

y $\mu^*(A) = \infty$, si A no posee $\mathcal{S}$-coberturas enumerables.

Paso 1: Afirmamos que μ^* es una medida exterior.

(i) Para $A = \varnothing$, consideramos la $\mathcal{S}$-cobertura $\{C_k\}_{k\geq 1}$, con $C_k = \varnothing$, para todo $k \geq 1$. Luego, $A = \varnothing = \bigcup_k \varnothing = \bigcup_k C_k$, $\Rightarrow \ \{C_k\}_{k\geq 1} \in \mathcal{C}(A)$. De ahí que

$$\mu^*(A) = \inf_{\mathcal{C}(A)} \Big\{ \sum_k \mu(S_k) \Big\} \leq \sum_k \mu(\varnothing) = \sum_k 0 = 0,$$

y esto muestra que $\mu^*(A) = 0$.

(ii) Sea $A \subseteq B$. Entonces cualquier $\mathcal{S}$-cobertura de B es también una $\mathcal{S}$-cobertura de A, y portanto $\mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$. Como consecuencia

$$\mu^*(A) = \inf_{\mathcal{C}(A)} \Big\{ \sum_{k\geq 1} \mu(S_k) \Big\} \leq \inf_{\mathcal{C}(B)} \Big\{ \sum_{k\geq 1} \mu(S_k) \Big\} = \mu^*(B).$$

Prueba del Teorema

(iii) Sea $\{A_k\}_{k\geq 1}$ una secuencia de conjuntos de X. Si existe algún j tal que $\mu^*(A_j) = \infty$, no hay nada que probar, pues $\mu^*\left(\bigcup_k A_k\right) \leq \sum_k \mu^*(A_k) = \infty$.

Suponga entonces que para todo $k \geq 1$, vale $\mu^*(A_k) < \infty$. Fijamos $\varepsilon > 0$. De la definición de ínfimo, para cada A_k existe una $\mathcal{S}$-cobertura $\{S_n^{(k)}\}_{n\geq 1}$ tal que

$$\sum_{k\geq 1} \mu^*(S_n^{(k)}) \leq \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad \forall k = 1, 2, \ldots$$

La unión de estas coberturas $\{S_n^{(k)}\}_{n,k\geq 1}$ es una $\mathcal{S}$-cobertura para $\bigcup_k A_k$.

$$\begin{aligned} \mu^*\Big(\bigcup_k A_k\Big) &\leq \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 1} \mu^*(S_n^{(k)}) \leq \sum_{k\geq 1}\Big(\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\Big) = \sum_{k\geq 1}\mu^*(A_k) + \sum_{k\geq 1}\frac{\varepsilon}{2^k} \\ &\leq \sum_{k\geq 1}\mu^*(A_k) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$, tenemos que $\mu^*\Big(\bigcup_k A_k\Big) \leq \sum_{k\geq 1}\mu^*(A_k)$.

Prueba del Teorema

Paso 2: Mostramos que μ^* extiende a μ.

Como primera parte, extenderemos μ a la familia $\mathcal{S}_U = \{S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_t : \; t \in \mathbb{N}, \; S_j \in \mathcal{S}\}$, definiendo la función $\overline{\mu} : \mathcal{S}_U \to [0, \infty]$ por

$$\overline{\mu}(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_t) = \mu(S_1) + \mu(S_2) + \ldots \mu(S_t).$$

Afirmamos que $\overline{\mu}$ está bien definida, esto es, si

$$S_1 \cup s_2 \cup \ldots \cup S_m = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n, \quad \text{con } S_i, T_j \in \mathcal{S},$$

entonces $\overline{\mu}(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m) = \overline{\mu}(T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n)$.

En efecto, suponga que $S_1 \cup s_2 \cup \ldots \cup S_m = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$, $S_i, T_j \in \mathcal{S}$.
Observe que

$$S_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} T_j, \; \text{para } i = 1, 2, \ldots, m; \qquad T_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} S_i, \; \text{para } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Prueba del Teorema

Como los $S_i \cap T_j \in \mathcal{S}$, entonces

$$S_i = S_i \cap \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} T_j = \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} (S_i \cap T_j), \ \forall i, \qquad T_j = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} S_i \cap T_j = \dot{\bigcup_{i=1}^{m}} (S_i \cap T_j), \ \forall j.$$

Y como μ es aditiva en $\mathcal{S}$, entonces

$$\mu(S_i) = \sum_{j=1}^{n} \mu(S_i \cap T_j), \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m; \qquad \mu(T_j) = \sum_{i=1}^{m} \mu(S_i \cap T_j), \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \overline{\mu}\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{m}} S_i\Big) &= \sum_{i=1}^{m} \mu(S_i) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mu(S_i \cap T_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \mu(S_i \cap T_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(T_j) \\ &= \overline{\mu}\Big(\dot{\bigcup_{j=1}^{n}} T_j\Big), \end{aligned}$$

lo que muestra que $\overline{\mu}$ está bien definida sobre $\mathcal{S}_U$.

Prueba del Teorema

Además, $\overline{\mu}$ extiende a μ, pues si $S_i \in \mathcal{S}$, entonces $\overline{\mu}(S_i) = \mu(S_i)$.

Mostramos ahora que $\mathcal{S}_U$ es cerrado bajo uniones finitas disjuntas. Sean $S, T \in_U$, con $S = S_1 \dot\cup \ldots \dot\cup S_m$, $T = T_1 \dot\cup \ldots \dot\cup T_n$, $S_i, T_j \in \mathcal{S}$.

- $S \cap T = \bigcup_{i=1}^{m} S_i \cap \bigcup_{j=1}^{n} T_j = \bigcup_{i,j} \underbrace{(S_i \cap T_j)}_{\in \mathcal{S}} \;\Rightarrow S \cap T \in \mathcal{S}_U$.
- $S - T = \bigcup_{i=1}^{m} S_i - \bigcup_{j=1}^{n} T_j = \bigcup_{i=1}^{m} S_i \cap \bigcap_{j=1}^{n} T_j^c = \bigcup_{i} \bigcap_{j} (S_i \cap T_j^c) = \bigcup_{i} \bigcap_{j} \underbrace{(S_i - T_j)}_{\in \mathcal{S}}$,

  y esto implica que $S - T \in \mathcal{S}_U$.
- Finalmente, $S \cup T = (S - T) \dot\cup (S \cap T) \dot\cup (T - S) \in \mathcal{S}_U$

En consecuencia, podemos definir $\mu(S \cup T) = \mu(S - T) + \mu(S \cap T) + \mu(T - S)$, y en general podemos definir μ para uniones finitas (no necesariamente disjuntas) de elementos en $\mathcal{S}$.

Prueba del Teorema

Ahora mostramos que $\overline{\mu}$ es una pre-medida en $\mathcal{S}_U$.

- $\overline{\mu}(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$, ya que $\varnothing \in \mathcal{S}$.
- Mostramos que $\overline{\mu}$ es σ-aditiva en $\mathcal{S}_U$. Tome $\{T_k\}_{k\geq 1}$ una secuencia de conjuntos disjuntos a pares en $\mathcal{S}_U$, y sea $T = \biguplus_k T_k \in \mathcal{S}_U$.

  Existe una secuencia $\{S_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{S}_U$, y una secuencia de índices $i(1) \leq i(2) \leq \ldots$ tales que

$$\begin{aligned} T_1 &= S_1 \uplus S_2 \uplus \ldots \uplus S_{i(1)}, \\ T_2 &= S_{i(1)+1} \uplus S_{i(1)+2} \uplus \ldots \uplus S_{i(2)}, \\ & \ldots \\ T_k &= S_{i(k-1)+1} \uplus S_{i(k-1)+2} \uplus \ldots \uplus S_{i(k)}, \\ & \ldots \end{aligned}$$

  Luego, $T = U_1 \uplus U_2 \uplus \ldots \uplus U_L$, donde $U_\ell = \biguplus_{i \in J_\ell} S_i \in \mathcal{S}_U$, y con conjuntos disjuntos de índices

$$J_1 \uplus J_2 \uplus \ldots \uplus J_L = \mathbb{N}.$$

Prueba del Teorema

Como μ es σ-aditiva en $\mathcal{S}$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(T) &= \sum_{\ell=1}^{L} \mu(U_\ell) = \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{i\in J_\ell} \mu(S_i) = \sum_{k\geq 1} \sum_{n=i(k-1)+1}^{i(k)} \mu(S_n) \\ &= \sum_{k\geq 1} \overline{\mu}(T_k). \end{aligned}$$

Esto muestra que $\overline{\mu}$ es σ-aditiva en $\mathcal{S}_U$, y portanto, $\overline{\mu}$ es pre-medida en $\mathcal{S}_U$. Finalmente, mostramos que μ^* extiende a la medida μ en $\mathcal{S}$.

Sea $A \in \mathcal{S}$. Usando la pre-dedida $\overline{\mu}$, para cualquier $\mathcal{S}$-cobertura $\{S_k\}_{k\geq 1} \in \mathcal{C}(A)$, vale

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \overline{\mu}(A) = \overline{\mu}\Big(A \cap \bigcup_k S_k\Big) = \overline{\mu}\Big(\bigcup_k (A \cap S_k)\Big) \leq \sum_k \overline{\mu}(\underbrace{A \cap S_k}_{\in \mathcal{S}}) \\ &\leq \sum_k \mu(A \cap S_k) \leq \sum_k \mu(S_k). \end{aligned}$$

Prueba del Teorema

Tomando el ínfimo sobre de las medidas sobre $\mathcal{C}(A)$, tenemos

$$\mu(A) \leq \inf_{\mathcal{C}(A)} \Big\{ \sum_k \mu(S_k) \Big\} = \mu^*(A), \quad \text{para todo } A \in \mathcal{S}.$$

La otra desigualdad resulta de tomar la $\mathcal{S}$-cobertura $\{A, \varnothing, \varnothing, \ldots\}$ de A, de modo que

$$\mu^*(A) \leq \mu(A) + \sum_k \mu(\varnothing) = \mu(A), \quad \text{para todo } A \in \mathcal{S}.$$

Esto muestra que $\mu^* = \mu$, en $\mathcal{S}$.

Paso 3: Definimos la colección de conjuntos μ^*-mesurables, mediante la condición de Carathéodory:

$$\mathcal{A}^* = \{A \subseteq X : \; \mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A), \forall Q \subseteq X\}.$$

Prueba del Teorema

Mostramos que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^*$: Sean $S, T \in \mathcal{S}$. Como $\mathcal{S}$ es un semi-anillo, entonces existe $S_1, S_2, \ldots, S_m \in \mathcal{S}$, disjuntos a pares, tales que

$$S - T = \dot{\bigcup_{i=1}^{m}} S_i.$$

Como μ es aditiva y de la definición de μ^*, entonces

$$\begin{aligned} \mu^*(T - S) + \mu^*(T \cap S) &\leq \mu(T \cap S) + \sum_{i=1}^{m} \mu(S_i) \leq \mu\Big((T \cap S) \,\dot\cup\, \dot{\bigcup_{i=1}^{m}} S_i\Big) \leq \mu(T) \\ &\leq \mu^*(T). \end{aligned}$$

Sea ahora $Q \subseteq X$, y tomemos una $\mathcal{S}$-cobertura $\{T_k\}_{k\geq 1}$ de B en $\mathcal{C}(Q)$. Entonces $Q \subseteq \dot\bigcup_k T_k$. Como los $T_k \in \mathcal{S}$, podemos aplicar la desigualdad anterior a cada T_k, y sumando todas esas desigualdades, obtenemos

$$\sum_k \mu^*(T_k - S) + \sum_k \mu^*(T_k \cap S) \leq \sum_k \mu^*(T_k).$$

Prueba del Teorema

Por la σ-subaditividad de μ^*, resulta

$$\mu^*(Q - S) + \mu^*(Q \cap S) \leq \mu^*\Big(\bigcup_k T_k - S\Big) + \mu^*\Big(\bigcup_k T_k \cap S\Big) \leq \sum_k \mu^*(T_k) = \sum_k \mu(T_k).$$

Tomando el ínfimo sobre las medidas en $\mathcal{C}(Q)$, resulta

$$\mu^*(Q - S) + \mu^*(Q \cap S) \leq \mu^*(Q).$$

Por otro lado, como $B \subseteq (Q - S) \,\dot\cup\, (Q \cap T)$, entonces $\mu^*(Q) \leq \mu^*(Q - S) + \mu^*(Q \cap S)$ vale debido a la sub-aditividad de μ^*. En consecuencia,

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q - S) + \mu^*(Q \cap S), \quad \text{para todo } Q \subseteq X.$$

Esto muestra que $Q \in \mathcal{A}^*$, y portanto $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^*$.

Mostramos ahora que $\mathcal{A}^*$ es una σ-álgebra y que μ^* es una medida sobre $\mathcal{A}^*$.

Prueba del Teorema

$\mathcal{A}^*$ es una σ-álgebra:

- $\mu^*(Q - \varnothing) + \mu^*(Q \cap \varnothing) = \mu^*(Q) + \mu^*(\varnothing) = \mu^(Q)$, para todo $Q \subseteq X$. Luego, $\varnothing \in \mathcal{A}^*$.
- Si $A \in \mathcal{A}^*$, entonces
$$\mu^*(Q - A) + \mu^*(Q \cap A) = \mu^*(Q \cap A^c) + \mu^*(Q - A^c) = \mu^*(Q), \;\; \forall Q \subseteq X,$$
  Esto muestra que $A^c \in \mathcal{A}^*$.
- Sean $A, B \in \mathcal{A}^*$. Entonces
$$\mu^*(Q - A) + \mu^*(Q \cap A) = \mu^*(Q), \qquad \mu^*(Q - B) + \mu^*(Q \cap B) = \mu^*(Q), \;\; \forall Q \subseteq X.$$
  De ahí
$$\begin{aligned} \mu^*(Q - (A \cup B)) + \mu^*(Q \cap (A \cup B)) &= \mu^*(Q - (A \cup B)) + \mu^*\big(Q \cap [(B - A) \dot\cup A]\big) \\ &\leq \mu^*(Q - (A \cup B)) + \mu^*(Q \cap (B - A)) + \mu^*(Q \cap A) + \\ &\leq \mu^*((Q - A) - B) + \mu^*((Q - A) \cap B) + \mu^*(Q \cap A) \\ &\leq \mu^*(Q - A) + \mu^*(Q \cap A) \;=\; \mu^*(Q). \end{aligned}$$

Prueba del Teorema

La otra desigualdad se sigue de la sub-aditividad de μ^*:

$$Q \subseteq (Q - (A \cup B)) \mathbin{\dot\cup} (Q \cap (A \cup B)) \;\Rightarrow\; \mu^*(Q) \leq \mu^*(Q - (A \cup B)) + \mu^*(Q \cap (A \cup B)).$$

Así, $\mu^*(Q) = \mu^*(Q - (A \cup B)) + \mu^*(Q \cap (A \cup B))$, para todo $Q \subseteq X$. Esto muestra que $A \cup B \in \mathcal{A}^*$.

Vía inducción, esto muestra que μ^* es cerrado bajo uniones finitas.

Mostramos ahora que $\mathcal{A}^*$ es cerrado bajo uniones enumerables disjuntas. Sea $\{A_k\}_{k \geq 1}$ una secuencia en $\mathcal{A}^*$, de conjuntos disjuntos a pares, y sea $A = \dot\bigcup_k A_k$. Del párrafo anterior, como cada unión finita $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{A}^*$, tenemos

$$\begin{aligned} \mu^*(Q) &= \mu^*(Q - (A_1 \mathbin{\dot\cup} \ldots \mathbin{\dot\cup} A_n)) + \mu^*(Q \cap (A_1 \mathbin{\dot\cup} \ldots \mathbin{\dot\cup} A_n)) \\ &\geq \mu^*(Q - A) + \mu^*(Q \cap (A_1 \mathbin{\dot\cup} \ldots \mathbin{\dot\cup} A_n)) \;=\; \mu^*(Q - A) + \sum_{k=1}^{n} \mu^*(Q \cap A_k). \end{aligned}$$

Haciendo $n \to \infty$, resulta $\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q - A) + \sum_{k \geq 1} \mu^*(Q \cap A_k) \geq \mu^*(Q - A) + \mu^*(Q \cap A)$.

Prueba del Teorema

De nuevo, la desigualdad reversa $\mu^*(Q) \leq \mu^*(Q - A) + \mu^*(Q \cap A)$ se sigue de la sub-aditividad de μ^*.

Portanto, para todo $Q \subseteq X$ se tiene que $\mu^*(Q) = \mu^*(Q - A) + \mu^*(Q \cap A)$, y tenemos que $A = \dot{\bigcup}_k A_k \in \mathcal{A}^*$.

Esto muestra que $\mathcal{A}^*$ es cerrado bajo uniones enumerables disjuntas, y portanto $\mathcal{A}^*$ es un sistema Dynkin. Además, como $\mathcal{A}^*$ es cerrado bajo uniones finitas, y cerrado bajo complementos, entonces $\mathcal{A}^*$ es cerrado bajo intersecciones finitas, y portanto es un π-sistema.

Así, del Teorema π-λ, $\mathcal{A}^*$ es una σ-álgebra.

Paso 4: Probamos que μ^* y en $\sigma(\mathcal{S})$ que extiende a la medida μ.
Hemos vismo en el Paso 3 que μ^* es σ-aditiva, por lo tanto es una medida en $\mathcal{A}^*$.
Como $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^*$, y $\mathcal{A}^*$ es σ-álgebra, entonces $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}^*$. Luego, $\mu^*\big|_{\sigma(\mathcal{S})}$ es una medida en $\sigma(\mathcal{S})$ que extiende a μ.

Prueba del Teorema

(ii) Finalmente, probamos la parte de la unicidad.

Suponga que existe una secuencia exhaustiva $\{S_k\}_{k\geq 1}$ en $\mathcal{S}$, tal que $S_k \nearrow X$ y $\mu(S_k) < \infty$, $\forall k \geq 1$. Como $\mathcal{S}$ es semi-anillo, entonces $\mathcal{S}$ es cerrado bajo intersecciones finitas. Entonces, del Teorema de Unicidad de Extensiones, $\mu^*\big|_{\sigma(\mathcal{S})}$ es la única medida que extiende μ a todo $\sigma(\mathcal{S})$. $\square$