Teorema de Unicidad de Extensiones

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 13) 06.marzo.2023

Medidas definidas sobre Generadores

Sea X conjunto no vacío. Consideremos el caso de $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$, una σ-álgebra en X generada por $\mathcal{S} \subseteq X$, donde $\mathcal{S}$ es cerrado bajo intersecciones finitas.
Afirmamos que para definir una medida en $\mathcal{A}$, es suficiente definirla esta medida en $\mathcal{S}$.

En efecto, sea $\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}$, y consideremos conjuntos $A, B \in \mathcal{S}$, disjuntos. De las propiedades vistas en el aula anterior, podemos definir la μ de los conjuntos $A \cup B$ por

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

En el caso finito, si establecemos $\mu(X) = M < \infty$, Entonces también podemos definir μ en A^c y B^c mediante

$$\mu(A^c) = \mu(X - A) = \mu(X) - \mu(A), \qquad \mu(B^c) = \mu(X - B) = \mu(X) - \mu(B).$$

y podemos definir también

$$\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) \qquad \text{y} \qquad \mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Podemos generalizar lo anterior a cualquier unión finita de elementos de $\mathcal{S}$ o sus complementos:

Medidas definidas sobre Generadores

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) - \sum_{i<j} \mu(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^n \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big).$$

Más aún, como $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$, en $\mathcal{A}$ también están consideradas las uniones (e intersecciones) enumerables de elementos en $\mathcal{S}$. Si $\{A_k\}_{k\geq 1}$ es una secuencia de elementos disjuntos a pares en $\mathcal{S}$, la propiedade de σ-aditividad podemos definir la medida en la unión de todos los A_k por

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

(**Pregunta**: ¿Qué ocurre si los A_k no son disjuntos a pares?)

Teoremas de Extensión

De lo anterior, surgen algunas preguntas naturales:

- ¿Es posible construir medidas a partir de definirlas sobre un conjunto generador?
- Si es así, cómo garantizo la existencia? ¿O la unicidad?

Recordemos que un **sistema de Dynkin** en X es una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X que cumple:

i) $X \in \mathcal{D}$,
ii) $A \in \mathcal{D} \implies A^c \in \mathcal{D}$,
iii) Si $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{D}$, son disjuntos a pares ($A_i \cap A_j = \varnothing$, para $i \neq j$), entonces la unión disjunta $\bigcup_k A_k \in \mathcal{D}$.

Propiedades:

- Si $\mathcal{D}$ es un sistema de Dynkin, entonces $\mathcal{D}$ es σ-álgebra $\Leftrightarrow$ $\mathcal{D}$ es π-sistema.
- Si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es estable bajo intersecciones (finitas), entonces $\delta(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{S})$.

Teorema (Unicidad de Extensión de Medidas)

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable, y suponga que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$ es generada por una colección $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que

i) *es estable bajo intersecciones finitas ($E, F \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; E \cap F \in \mathcal{S}$),*

ii) *existe una secuencia exhaustiva $\{G_k\}_{k\geq 1}$ en $\mathcal{S}$ ($G_k \nearrow X$).*

Entonces, si μ y ν son dos medidas que coinciden en $\mathcal{S}$ ($\mu(E) = \nu(E), \ \forall E \in \mathcal{S}$) y son finitas para todos elemento de la secuencia exhaustiva ($\mu(G_k) = \nu(G_k) < \infty, \ \forall k \geq 1$), entonces $\mu = \nu$ coinciden en todo $\mathcal{A}$.

Prueba: Para cada $k \geq 1$ definimos el conjunto

$$\mathcal{D}_k = \{A \in \mathcal{A} : \ \mu(A \cap G_k) = \nu(A \cap G_k)\}.$$

Afirmamos que los $\mathcal{D}_k$ son sistemas de Dynkin.

Teoremas de Extensión

(i) Como $\varnothing \cap G_k = \varnothing$, entonces $\mu(\varnothing \cap G_k) = 0 = \nu(\varnothing \cap G_k)$, de modo que $\varnothing \in \mathcal{D}_k$.

(ii) Si $A \in \mathcal{D}_k$, entonces $\mu(A \cap G_k) = \nu(A \cap G_k)$. Luego

$$\begin{aligned}
\mu(A^c \cap G_k) &= \mu(G_k - A) = \mu\big(G_k - (A \cap G_k)\big) = \mu(G_k) - \mu(A \cap G_k) \\
&= \nu(G_k) - \nu(A \cap G_k) = \nu(G_k - A) = \nu(A^c \cap G_k),
\end{aligned}$$

y esto muestra que $A^c \in \mathcal{D}_k$.

(iii) Sea $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{D}_k$, una colección de conjuntos disjuntos a pares. Entonces $\mu(A_n \cap G_k) = \nu(A_n \cap G_k)$ $\forall n \geq 1$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\dot{\bigcup_n} A_n \cap G_k\Big) &= \mu\Big(\dot{\bigcup_n}(A_n \cap G_k)\Big) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n \cap G_k) = \sum_{n\geq 1} \nu(A_n \cap G_k) \\
&= \nu\Big(\dot{\bigcup_n}(A_n \cap G_k)\Big) = \nu\Big(\dot{\bigcup_n} A_n \cap G_k\Big),
\end{aligned}$$

lo que muestra que $\dot{\bigcup}_n A_n \in \mathcal{D}_k$.

Así que esto muestra la afirmación, y todos los $\mathcal{D}_k$ son sistemas de Dynkin.

Sea $E \in \mathcal{S}$. Para cada $k \geq 1$, se tiene que $G_k \in \mathcal{S}$. Como $\mathcal{S}$ es estable bajo intersecciones finitas, entonces $E \cap G_k \in \mathcal{S}$, $\forall k \geq 1$. Así,

$$\mu(E \cap G_k) = \nu(E \cap G_k),$$

de modo que $E \in \mathcal{D}_k$, $\forall k \geq 1$. Esto muestra que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_k$, para todo $k \geq 1$.

Ahora, del Teorema π-λ, como $\mathcal{S}$ es estable bajo intersecciones, entonces $\delta(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{S})$. Pero, siendo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_k$, y los $\mathcal{D}_k$ son sistemas de Dynkin, entonces

$$\sigma(\mathcal{S}) = \delta(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{D}_k, \quad \forall k \geq 1.$$

Además, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{D}_k \subseteq \mathcal{A}$, implica que $\mathcal{D}_k = \mathcal{A}$ para todo $k \geq 1$. En particular,

$$\mu(A \cap G_k) = \nu(A \cap G_k), \qquad \text{para todo } A \in \mathcal{A}, \text{ y todo } k \geq 1.$$

Teoremas de Extensión

Sea $A \in \mathcal{A}$. Como $\{G_k\}_{k\geq 1}$ es una secuencia exhaustiva en $\mathcal{S}$, entonces $G_k \nearrow X$. De ahí que

$$A \cap G_k \nearrow A \cap X = A, \quad \text{para todo} A \in \mathcal{A}.$$

Por continuidad inferior de μ y ν, entonces

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\big(\lim_k (A \cap G_k)\big) = \lim_k \mu(A \cap G_k) = \lim_k \nu(A \cap G_k) = \nu\big(\lim_k (A \cap G_k)\big) \\ &= \nu(A). \end{aligned}$$

Esto muestra que $\mu(A) = \nu(A)$, para todo $A \in \mathcal{A}$, de modo que $\mu \equiv \nu$ en $\mathcal{A}$. $\square$

Aplicación

Pregunta: ¿Por qué la medida de Lebesgue es importante?

Teorema (Invarianza de la Medida de Lebesgue)

i) *La medida de Lebesgue λ^n en $\mathbb{R}^n$ es invariante por traslaciones, esto es*

$$\lambda^n(\mathbf{x}+B) = \lambda^n(B), \qquad \text{para todo } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

ii) *Toda medida μ en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ que es invariante bajo traslaciones, es de la forma*

$$\mu = k\lambda^n, \qquad \text{para alguna constante } 0 \leq k < \infty.$$

De hecho, $k = \mu([0,1)^n)$.

Prueba: 1.- Mostraremos que si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces el conjunto $\mathbf{x} + B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. (Traslaciones llevan borelianos en borelianos).

Aplicación

Sea $\in \mathbb{R}^n$. Consideremos la colección

$$\mathcal{A}_{\mathbf{x}} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \ \mathbf{x} + B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{A}_{\mathbf{x}}$ es una σ-álgebra:

- $\mathbf{x} + \varnothing = \varnothing \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Luego, $\varnothing \in \mathcal{A}_{\mathbf{x}}$.
- Si $A \in \mathcal{A}_{\mathbf{x}}$, entonces $\mathbf{x} + A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathbf{x} + A^c = (\mathbf{x} + A)^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $A^c \in \mathcal{A}_{\mathbf{x}}$.
- Sea $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbf{x}}$. Entonces $\mathbf{x} + A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, para cada $k \geq 1$. Como $\mathbf{x} + \bigcup_k A_k = \bigcup_k (\mathbf{x} + A_k) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $\bigcup_k A_k \in \mathcal{A}_{\mathbf{x}}$.

Esto muestra que $\mathcal{A}_{\mathbf{x}}$ es una σ-álgebra, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Por otro lado, afirmamos que los rectángulos semi-abiertos

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) = \Big\{ \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) : \ a_i < b_i \Big\}$$

están todos contenidos en $\mathcal{A}_{\mathbf{x}}$.

Aplicación

En efecto, sea $I = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)$ cualquier intervalo semi-abierto en $\mathcal{J}$. Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces

$$\mathbf{x} + \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i) = \prod_{i=1}^{n}[x_i + a_i,\ x_i + b_i) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

De ahí que $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i) \in \mathcal{A}_{\mathbf{x}}$. Esto muestra que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbf{x}}$. Luego,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{A}_{\mathbf{x}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

y hemos probado que $\mathcal{A}_{\mathbf{x}} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

En particular, $\mathbf{x} + B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, y todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
(lo que muestra que traslaciones de borelianos son de nuevo borelianos).

2.- Fijado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, definimos ahora una función $\nu_{\mathbf{x}} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\nu_{\mathbf{x}}(B) = \lambda^n(\mathbf{x} + B).$$

Aplicación

Afirmamos que $\nu_{\mathbf{x}}$ es una medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:

i) $\nu_{\mathbf{x}} \geq 0$, ya que $\lambda^n \geq 0$.

ii) $\nu_{\mathbf{x}}(\varnothing) = \lambda^n(\mathbf{x} + \varnothing) = \lambda^n(\varnothing) = 0$.

iii) Si $\{A_k\}_{k\geq 1}$ es una colección de subconjuntos disjuntos a pares en $(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\nu_{\mathbf{x}}\Big(\dot{\bigcup_k} A_k\Big) = \lambda^n\Big(\mathbf{x} + \dot{\bigcup_k} A_k\Big) = \lambda^n\Big(\dot{\bigcup_k}(\mathbf{x} + A_k)\Big) = \sum_{k=1} \lambda^n(\mathbf{x} + A_k) = \sum_{k=1} \nu_{\mathbf{x}}(A_k),$$

lo que muestra que $\nu_{\mathbf{x}}$ es una medida (positiva) en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Además, para un intervalo $I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, vale

$$\nu_{\mathbf{x}}(I) = \mu_{\mathbf{x}}\Big(\prod_{i=1}^n [a_i, b_i)\Big) = \lambda^n\Big(\mathbf{x} + \prod_{i=1}^n [a_i, b_i)\Big) = \lambda^n\Big(\prod_{i=1}^n [x_i + a_i,\ x_i + b_i)\Big) = \lambda^n(I).$$

Aplicación

Así, $\nu_{\mathbf{x}}(I) = \lambda^n(I)$, para todo intervalo semi-abierto $I \in \mathcal{J}$.

3.- Mostramos ahora que la colección $\mathcal{J}$ de intervalos semi-abiertos cumple con las condiciones requeridas en el Teorema de Unicidad de Extensión.

i) Sean $I_1 = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i)$ e $I_2 = \prod_{i=1}^n [c_i, d_i)$ intervalos semi-abiertos. Para calcular la intersección, tenemos dos casos:

- Si $c_i < b_i$ para todo $1 \leq i \leq n$: En ese caso, definimos $\alpha_i = \max\{a_i, c_i\}$ y $\beta_i = \min\{b_i, d_i\}$. Tenemos que

$$I_1 \cap I_2 = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i) \cap \prod_{i=1}^n [c_i, d_i) = \prod_{i=1}^n [\max\{a_i, c_i\},\ \min\{b_i, d_i\}) = \prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i).$$

  de nuevo un intervalo semi-abierto en $\mathcal{J}$.
- Si $b_i < c_i$ para algún i, entonces $[a_i, b_i) \cap [c_i, d_i) = \varnothing$ e $I_1 \cap I_2 = \varnothing \in \mathcal{J}$.

Aplicación

ii) Para cada $k \geq 1$, definamos $I_k = \prod_{i=1}^n [-k, k)$. La colección $\{I_k\}_{k \geq 1}$ está en $\mathcal{J}$ y define una secuencia ascendente $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots$ cuyo límite es

$$\bigcup_k I_k = \bigcup_k \prod_{i=1}^n [-k, k) = \mathbb{R}^n.$$

Así, $\{I_k\}$ define una secuencia exhaustiva en $\mathcal{J}$. Además, $\nu_{\mathbf{x}}(I_k) = \lambda^n(I_k) = (2k)^n < \infty$, para todo $k \geq 1$.

Así, $\nu_{\mathbf{x}}$ y λ^n son dos medidas que coinciden en $\mathcal{J}$. Como $\mathcal{J}$ es un generador para la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{J}$ es estable bajo intersecciones finitas, y posee una secuencia exhaustiva, de elementos con medida finita, entonces por el Teorema de Unicidad de Extensión, $\nu_{\mathbf{x}} = \lambda^n$, coinciden en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Esto muestra que $\lambda^n(\mathbf{x} + B) = \nu_{\mathbf{x}}(B) = \lambda^n(B)$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, y portanto la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones.

Aplicación

Para mostrar la segunda parte (ii), sea $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una medida en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ que es invariante bajo traslaciones.

Tome $I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i)$, un intervalo semi-abierto, con $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Esto es, $I \in \mathcal{J}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{J}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora, observe que existen $M \in \mathbb{N}$, $k(I) \in \mathbb{N}$, y existen puntos $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$I = \bigcup_{i=1}^{k(I)} \!\!\cdot\; \Big(\mathbf{x}_i + [0, \tfrac{1}{M})^n\Big).$$

Aplicación

Usamos ahora la invarianza por traslación de las medidas μ y λ^n. Tenemos:

$$\mu(I) = k(I)\cdot\mu\big([0,\tfrac{1}{M})^n\big), \qquad \mu([0,1]^n) = M^n\cdot\mu\big([0,\tfrac{1}{M})^n\big),$$
$$\lambda^n(I) = k(I)\cdot\lambda^n\big([0,\tfrac{1}{M})^n\big), \qquad \lambda^n([0,1]^n) = M^n\cdot\lambda^n\big([0,\tfrac{1}{M})^n\big).$$

Juntando la primera y segunda identidad

$$\mu(I) = \frac{k(I)}{M^n}\mu\big([0,1)^n\big).$$

Juntando la tercera y cuarta identidad

$$\lambda^n(I) = \frac{k(I)}{M^n}\underbrace{\lambda^n\big([0,1)^n\big)}_{=1} = \frac{k(I)}{M^n}.$$

Luego, $\mu(I) = \underbrace{\mu\big([0,1)^n\big)}_{=k}\cdot\lambda^n\big([0,1)^n\big)$.

Aplicación

Lo anterior muestra que $\mu(I) = k \cdot \lambda^n(I)$, para todo intervalo $I \in \mathcal{J}_{\mathbb{Q}}$.

Como $\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}$ es un generador para la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, nos gustaría usar ahora el Teorema de Unicidad para extender esta igualdad $\mu = k\lambda^n$ a todo $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

De nuevo, se debe mostrar que

i) $\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}$ es cerrado bajo intersecciones finitas, ya que

$$I_1 \cap I_2 = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \cap \prod_{i=1}^{n} [c_i, d_i) = \prod_{i=1}^{n} [\max\{a_i, c_i\},\ \min\{b_i, d_i\}) = \prod_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i),$$

con $\alpha_i = \max\{a_i, c_i\}, \beta_i = \min\{b_i, d_i\} \in \mathbb{Q}$, es de nuevo un intervalo semi-abierto en $\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}$.

ii) La secuencia de intervalos $I_k = \prod_{i=1}^{n} [-k, k) \in \mathcal{J}_{\mathbb{Q}}$, define de nuevo una secuencia exhaustiva en $\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}$, con $\lambda^n(I_k) = (2k)^n < \infty$, para todo $k \geq 1$.

Ejemplos

Finalmente, el Teorema de Unicidad de Extensión de medidas, implica que $\mu = k \cdot \lambda^n$ coinciden en toda la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Así, las únicas medidas positivas, que son invariantes bajo traslaciones en $\mathbb{R}^n$, son aquellas múltiplos de la medida de Lebesgue. (O sea, salvo factores constantes, la medida de Lebesgue es la única invariante por traslaciones). Lo que completa el resultado. $\square$