Medidas Positivas

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 12) 27.febrero.2023

Medidas Positivas

Deseamos generalizar las propiedades que posee la medida de Lebesgue.

Definición

*Sea X un conjunto no vacío, y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en X. Una **medida (positiva)** en X es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty] = \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ que satisface:*

i) $\mu(\varnothing) = 0$,

ii) *Para cualquier colección enumerable $\{A_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{M}$, de conjuntos disjuntos a pares ($A_i \cap A_j = \varnothing$, para $i \neq j$), vale*

$$\mu\Big(\bigcup_{k \geq 1} A_k\Big) = \sum_{k \geq 1} \mu(A_k). \qquad (\sigma\text{-aditividad})$$

Obs! Cuando valen las condiciones (i) y (ii) anteriores, pero $\mathcal{A}$ no es una σ-álgebra, decimos que μ es una **pre-medida**.

Medidas Positivas

Obs! Siempre se requiere verificar que $\bigcup_k A_k \in \mathcal{A}$. Cuando $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, y los $A_k \in \mathcal{A}$ esto no es necesario, pero en el caso de pre-medidas, se requiere más cuidado: **Antes de calcular $\mu(B)$, se debe verificar que $B \in \mathcal{A}$.**

Definición

*Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en X. El par $(X, \mathcal{A})$ se llama un **espacio mesurable**. Cuando fijamos una medida $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, llamamos a la estructura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un **espacio de medida**.*

Definición

*Una **medida finita** (o **medida compacta**) es aquella donde $\mu(X) < \infty$.*

*Una **medida de probabilidad** es aquella donde $\mu(X) = 1$. En este caso, denotamos usualmente $\mu = \mathbb{P}$, y al espacio $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ le llamamos un **espacio de probabilidad**.*

*Una medida $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ es σ-**finita** si $\mathcal{A}$ contiene alguna secuencia $\{A_k\}_{k \geq 1}$ tal que $A_k \nearrow X$ y $\mu(A_k) < \infty$ para todo $k \geq 1$.*

Teorema (Propiedades de medidas positivas)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida, y sean* $A, B, A_k, B_k \in \mathcal{A}$*, para todo* $k \geq 1$*. Entonces:*

1) *(aditividad)* $A \cap B = \varnothing \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
2) *(monotonía)* $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$.
3) *(diferencia)* $A \subseteq B$ *y* $\mu(A) < \infty \implies \mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.
4) *(inclusión-exclusión)* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.
5) *(sub-aditividad) Para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$.
6) *(continuidad inferior)* $A_k \nearrow A \implies \mu(A) = \lim_k \mu(A_k) = \sup_k \mu(A_k)$.
7) *(continuidad superior)* $B_k \searrow B$ *y* $\mu(B_1) < \infty \implies \mu(B) = \lim_k \mu(B_k) = \inf_k \mu(B_k)$.
8) *(σ-sub-aditividad)* $\mu\Big(\bigcup_{k\geq 1} A_k\Big) \leq \sum_{k\geq 1} \mu(A_k)$.

Prueba: (1) (aditividad) $A \cap B = \varnothing \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Hacemos $A_1 = A$, $A_2 = B$ y $A_k = \varnothing$, para $k \geq 3$. Entonces $\{A_k\}_k$ es una secuencia de conjuntos disjuntos a pares, cuya unión es $A \cup B$. Del axioma (ii), entonces

$$\mu(A \cup B) = \mu\Big(\bigcup_{k \geq 1} A_k\Big) = \sum_{k \geq 1} \mu(A_k) = \mu(A) + \mu(B).$$

(2) (monotonía) $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$.

Como $A \subseteq B$, entonces $B = A \cup (B - A)$ es una unión disjunta. Por la propiedad (1), y como μ es una medida positiva, tenemos

$$\mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B - A)}_{\geq 0} \geq \mu(A).$$

(3) (diferencia) $A \subseteq B$ y $\mu(B) < \infty \implies \mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Medidas Positivas

Como $A \subseteq B$ y $\mu(A) < \infty$, podemos restas $\mu(A)$ en ambos lados de la propiedad en (2) $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$. Obtenemos entonces

$$\mu(B) - \mu(A) = \mu(B - A).$$

(4) (inclusión-exclusión) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

Cuando $\mu(A) = \infty$ ó $\mu(B) = \infty$, por monotonía, tenemos que $\mu(A \cup B) = \infty$, y no hay nada que probar.

En el caso, $\mu(A), \mu(B) < \infty$, escribimos $A \cup B$ como unión disjunta de tres conjuntos en $\mathcal{A}$:

$$A \cup B = \big[A - (A \cap B)\big] \cup \big[B - (A \cap B)\big] \cup \big[A \cap B\big].$$

De nuevo, la propiedad (1) garantiza que

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu\big(A - (A \cap B)\big) + \mu\big(B - (A \cap B)\big) + \mu\big(A \cap B\big) \\ &= (\mu(A) - \mu(A \cap B)) + (\mu(B) - \mu(A \cap B)) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B). \end{aligned}$$

(5) (sub-aditividad) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$.

Probamos por inducción sobre n. Usando el principio de inclusión-exclusión (4):

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \underbrace{\mu(A_1 \cap A_2)}_{\geq 0} \leq \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

Asumiendo que $\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$, de nuevo el principio de inclusión-exclusión

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n+1}) &= \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) + \mu(A_{n+1}) - \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cap A_{n+1}\Big) \\ &\leq \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) + \mu(A_{n+1}) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) + \mu(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k). \end{aligned}$$

(6) (continuidad inferior) $A_k \nearrow A \implies \mu(A) = \lim_k \mu(A_k) = \sup_k \mu(A_k)$.

Sea $A = \bigcup_{k\geq 1} A_k$. Consideremos los conjuntos, definidos por

$$B_1 = A_1, \;\; B_2 = A_2 - A_1, \;\; B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2), \;\; \ldots \;\; B_k = A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i, \; \forall k \geq 2.$$

Observe que todos los $B_k \in \mathcal{A}$. Además, por inducción es simple verificar que $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = A_n, \forall n \in \mathbb{N}$, de modo que $\dot{\bigcup}_{k\geq 1} B_k = \bigcup_{k\geq 1} A_k = A$.

Por σ-aditividad, tenemos

$$\mu(A) \;=\; \sum_{k\geq 1} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Medidas Positivas

(7) (continuidad superior) $B_k \searrow B$ y $\mu(B) < \infty \implies \mu(B) = \lim_k \mu(B_k) = \inf_k \mu(B_k)$.

Como $B_k \searrow B$, entonces $B_k \subseteq B_1$, para todo $k \geq 1$.

En particular, de la propiedad de monotonía (2), $\mu(B_1) < \infty$ implica que $\mu(B_1 - B_k) < \infty$, para todo $k \geq 1$.

Además,

$$B_k \searrow B \;\Rightarrow\; B_1 - B_k \nearrow B_1 - B,$$

y este último límite también tiene medida $\mu(B_1 - B) < \infty$.

Por (6) y la propiedad de diferencias (3), tenemos que

$$\mu(B_1) - \lim_k \mu(B_k) = \lim_k \big(\mu(B_1) - \mu(B_k)\big) = \lim_k \mu(B_1 - B_k) = \mu(B_1 - B) = \mu(B_1) - \mu(B).$$

Esto muestra que $\lim_k \mu(B_k) = \mu(B)$.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

(8) (σ-sub-aditividad) $\mu\Big(\bigcup_{k\geq 1} A_k\Big) \leq \sum_{k\geq 1} \mu(A_k)$.

De la sub-aditividad (5), tenemos $\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$. Luego,

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \mu\Big(\lim_n \bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \lim_n \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \lim_n \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \ \square$$

Ejemplos

Ejemplo 1. (Medida Nula)
Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en X, y consideremos la función $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(A) = 0, \quad \text{para todo } A \in \mathcal{A}.$$

Claramente

(i) $\mu(\varnothing) = 0$.

(ii) Si $\{A_k\}_k$ es una secuencia en $\mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos a pares, tenemos que $\bigcup_k A_k \in \mathcal{A}$, y vale

$$\mu\Big(\bigcup_{k\geq 1} A_k\Big) = 0 = \sum_{k\geq 1} \mu(A_k).$$

Luego, μ es una medida, llamada la **medida nula** en $\mathcal{A}$.

Ejemplo 2. (Medida Infinita)
Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en X, y consideremos la función $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \varnothing; \\ \infty, & A \neq \varnothing. \end{cases}$$

De nuevo tenemos

(i) $\mu(\varnothing) = 0$.

(ii) si $\{A_k\}_k$ es una secuencia en $\mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos a pares, tenemos dos casos:
- Si $A_k = \varnothing$, $\forall k$, entonces $\bigcup_k A_k = \varnothing$ y vale $\mu\big(\bigcup_{k\geq 1} A_k\big) = 0 = \sum_{k\geq 1} \mu(A_k)$.
- Si $A_k \neq \varnothing$, para algún k, entonces $\bigcup_k A_k \neq \varnothing$ y vale $\mu\big(\bigcup_{k\geq 1} A_k\big) = \infty = \sum_{k\geq 1} \mu(A_k)$.

Portanto, μ es una medida, llamada la **medida infinita** en $\mathcal{A}$.

Ejemplo 3. (La medida de Dirac o de masa unitaria)

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable, y sea $\mathbf{x} \in X$. Definimos la función $\delta_{\mathbf{x}} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, por

$$\delta_{\mathbf{x}}(A) = \mathbf{1}_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \notin A; \\ 1, & \mathbf{x} \in A. \end{cases}$$

(la función $\mathbf{1}_A$ se llama la **función indicadora** de A).

Observe que

(i) $\mu(\varnothing) = 0$, ya que $\mathbf{x} \notin \varnothing$.

(ii) Sea $\{A_k\}_k$ una secuencia en $\mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos a pares. Tenemos dos casos:
- Si $\mathbf{x} \notin A_k$, $\forall k$, entonces $\mathbf{x} \notin \bigcup_k A_k$. En este caso, $\delta_{\mathbf{x}}(A_k) = 0$, $\forall k$ y $\delta_{\mathbf{x}}\big(\bigcup_{k \geq 1} A_k\big) = 0$. Entonces

$$\delta_{\mathbf{x}}\Big(\bigcup_{k \geq 1} A_k\Big) = 0 = \sum_{k \geq 1} \delta_{\mathbf{x}}(A_k).$$

Ejemplos

- Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x} \in A_n$, entonces $\delta_{\mathbf{x}}(A_n) = 1$. Además, $\delta_{\mathbf{x}}(A_k) = 0$, para todo $k \neq n$, ya que los A_k son disjuntos a pares. Luego, como $\mathbf{x} \in \bigcup_k A_k$,

$$\delta_{\mathbf{x}}\Big(\bigcup_{k\geq 1} A_k\Big) = 1 = \sum_{k\geq 1} \delta_{\mathbf{x}}(A_k).$$

Portanto, $\delta_x x$ es una medida, llamada la **medida de Dirac** en $\mathbf{x}$.

Obs! En física usualmente se usa la versión

$$\delta_{\mathbf{x}}(A) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \notin A; \\ \infty, & \mathbf{x} \in A. \end{cases}$$

Ejemplo 4.

Sea X un conjunto infinito, y consideremos la σ-álgebra $\mathcal{A}$, dada por

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : \ A \text{ es enumerable ó } A^c \text{ es enumerable}\}.$$

Definimos la función $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, por

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ es enumerable;} \\ \infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(i) $\mu(\varnothing) = 0$, ya que $\mathbf{x} \notin \varnothing$.

(ii) Sea $\{A_k\}_k$ una secuencia en $\mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos a pares. Tenemos dos casos:
- Si A_k es enumerable, $\forall k$, entonces $\bigcup_k A_k$ es enumerable. Luego, $\mu\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) = 0 = \sum_{k\geq 1} \mu(A_k)$.
- Si A_k es no enumerable, para algún k, entonces $\bigcup_k A_k$ tampoco es enumerable. Luego, $\mu\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) = \infty = \sum_{k\geq 1} \mu(A_k)$.

Esto muestra que μ es una medida.

Ejemplo 5. (La medida de conteo)

Sea $(X,\mathcal{A})$ un espacio mesurable, y consideremos la función $|\cdot|: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, dada por

$$|A| = \begin{cases} \#A, & A \text{ es finito;} \\ \infty, & A \text{ no es finito.} \end{cases}$$

Observe que $|\cdot|$ es una medida:

(i) $|\varnothing| = \#\varnothing = 0$.

(ii) Sea $\{A_k\}_k$ una secuencia en $\mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos a pares. Tenemos dos casos:

- Si todos los A_k son finitos, entonces $|A_k| = \#A_k$, $\forall k$ y
$$\Big|\bigcup_{k\geq 1} A_k\Big| = \sum_{k\geq 1} |A_k|.$$
- Si algún A_k es infinito, entonces también lo es $\bigcup_k A_k$ y
$$\Big|\bigcup_{k\geq 1} A_k\Big| = \infty = \sum_{k\geq 1} |A_k|.$$

Ejemplo 6. (Probabilidades discretas)

Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ un conjunto infinito enumerable. Consideremos una secuencia $\{p_n\}_{n\geq 1}$ de número reales no-negativos tales que

$$0 \leq p_n \leq 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \;\; \text{y} \;\; \sum_{n\geq 1} p_n = 1.$$

En el espacio mesurable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, definimos la función $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_n \in A} p_n = \sum_{n\geq 1} p_n \, \mathbf{1}_A(\omega_n) = \sum_{n\geq 1} p_n \, \delta_{\omega_n}(A).$$

La función $\mathbb{P}$ así construida, define una medida en $\mathcal{P}(\Omega)$. De hecho, $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad.

El espacio $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ se llama un **espacio de probabilidad discreto**, pues

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega_n \in \Omega} p_n = \sum_{n\geq 1} p_n = 1.$$

Ejemplos

Ejemplo 7. (La medida de Lebesgue)

Sea $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ su σ-álgebra de Borel. Vamos a mostrar más adelante que existe una única medida $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ que coincide con la longitud de los intervalos abiertos (a, b) esto es
$$\lambda((a, b)) = b - a.$$

Esta λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 8. (La medida de Lebesgue-Stieltjes)

Sea $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ su σ-álgebra de Borel, y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona no-decreciente. Mostraremos más adelante que existe una única medida $\lambda_f : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que para todo intervalo abierto (a, b) vale
$$\lambda_f((a, b)) = f(b) - f(a).$$

Esta λ_f es la **medida de Lebesgue-Stieltjes** generada por f en $\mathbb{R}$.