Clases Monótonas, λ-sistemas y π-sistemas

Alan Reyes-Figueroa
Teoría de la Medida e Integración (Aula 11) 22.febrero.2023

Definición

Sea X un conjunto no vacío. Una colección $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X se llama una ***clase monótona*** *en X si:*

i) $X \in \mathcal{M}$,

ii) $\{A_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{M}$, con $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \implies \bigcup_k A_k \in \mathcal{M}$,

iii) $\{A_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{M}$, con $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots \implies \bigcap_k A_k \in \mathcal{M}$.

Clases Monótonas

Definición

*Sea X un conjunto no vacío. Una colección $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X se llama una **clase monótona** en X si:*

i) $X \in \mathcal{M}$,

ii) $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{M}$, con $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \implies \bigcup_k A_k \in \mathcal{M}$,

iii) $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{M}$, con $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots \implies \bigcap_k A_k \in \mathcal{M}$.

Lema

La intersección arbitraria $\bigcap_{\ell\in\Lambda} \mathcal{M}_\ell$ de clases monótonas $\mathcal{M}_\ell$ en X, es una clase monótona en X.

Clases Monótonas

Prueba:

i) $X \in \mathcal{M}_\ell$, para todo $\ell \in \Lambda$. Luego, $X \in \bigcap_\ell \mathcal{M}_\ell$.

ii) Sea $\{A_k\}_{k=1}^\infty \in \bigcap_\ell \mathcal{M}_\ell$, una cadena ascendente de conjuntos. Entonces todos los A_k están contenidos en las $\mathcal{M}_\ell$, $\forall \ell \in \Lambda$. Como cada $\mathcal{M}_\ell$ es clase monótona, entonces $\bigcup_k A_k \in \mathcal{M}_\ell$, $\forall \ell \in \Lambda$.
Luego, $\bigcup_k A_k \in \bigcap_\ell \mathcal{M}_\ell$.

iii) Sea $\{A_k\}_{k=1}^\infty \in \bigcap_\ell \mathcal{M}_\ell$, una cadena descendente de conjuntos. Entonces todos los A_k están contenidos en las $\mathcal{M}_\ell$, $\forall \ell \in \Lambda$. Como cada $\mathcal{M}_\ell$ es clase monótona, entonces $\bigcap_k A_k \in \mathcal{M}_\ell$, $\forall \ell \in \Lambda$.
Luego, $\bigcap_k A_k \in \bigcap_\ell \mathcal{M}_\ell$.

Esto muestra que $\bigcap_\ell \mathcal{M}_\ell$ es clase monótona en X. $\square$

Teorema

Sea X conjunto no vacío, y sea $\mathcal{S}$ cualquier colección de subconjuntos de X. Existe una clase monótona $m(\mathcal{S})$ en X tal que

a) $\mathcal{S} \subseteq m(\mathcal{S})$,

b) si $\mathcal{M}$ es otra clase monótona en X tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$, entonces $m(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}$.

Prueba: Consideramos la familia de todas las σ-álgebras de X que contienen a $\mathcal{S}$:

$$\Phi = \{\mathcal{F} : \ \mathcal{F} \text{ es } \sigma\text{-álgebra de } X, \ \text{y } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}\}.$$

Ya vimos que $\Phi \neq \varnothing$. Definimos $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S}) = \bigcap \Phi = \bigcap_{\mathcal{F}\in\Phi} \mathcal{F}$. Observe que $\sigma(\mathcal{S})$ es una σ-álgebra en X, por ser intersección de σ-álgebras, y además $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$.

Si $\mathcal{G}$ es alguna σ-álgebra en X con $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G}$ es uno de los elementos en Φ, de modo que $\mathcal{G} \subseteq \bigcap \Phi = \mathcal{A}$. $\square$

Clases Monótonas

Definición

*$m(\mathcal{S})$ se llama la **clase monótona generada** por $\mathcal{S}$.*

Proposición

Sea X conjunto no vacío, y sean $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ colecciones de subconjuntos en X. La clase monótona generada satisface las siguientes propiedades:

i) $\mathcal{S} \subseteq m(\mathcal{S})$,

ii) si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $m(\mathcal{S}) \subseteq m(\mathcal{T})$,

iii) $m(m(\mathcal{S})) = m(\mathcal{S})$,

iv) si $\mathcal{S}$ es una clase monótona, entonces $m(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

Prueba: Ejercicio! $\square$

Proposición

Toda σ-álgebra $\mathcal{A}$ en X es una clase monótona.

Prueba: Mostramos las tres condiciones requeridas para ser clase monótona.

i) $X \in \mathcal{A}$, ya que $\mathcal{A}$ es σ-álgebra.

ii) Sea $\{A_k\}_{k\geq 1}$ una secuencia ascendente de conjuntos en $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones enumerables, entonces $\bigcup_k A_k = \lim_k A_k \in \mathcal{A}$. Esto muestra que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo unión secuencias ascendentes.

iii) Sea $\{A_k\}_{k\geq 1}$ una secuencia descendente de conjuntos en $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es σ-álgebra, entonces la secuencia $\{A_k^c\}_{k\geq 1}$ está totalmente contenida en $\mathcal{A}$. Además, esta es una secuencia ascendente. Por (ii), tenemos que $\bigcup_k A_k^c = \left(\bigcap_k A_k\right)^c \in \mathcal{A}$. Luego, siendo $\mathcal{A}$ una σ-álgebra, el complemento $\lim_k A_k = \bigcap_k A_k \in \mathcal{A}$. Esto muestra que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo unión secuencias descententes.

Portanto, $\mathcal{A}$ es una clase monótona. $\square$

Teorema (Teorema de Clases Monótonas)

Sea $\mathcal{S}$ una colección de conjuntos en X que es cerrada bajo complementos e intersecciones finitas (un álgebra en X). Entonces, $\sigma(\mathcal{S}) = m(\mathcal{S})$.

Prueba: De la proposición anterior, $\sigma(\mathcal{S})$ es una clase monótona, con $\mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$. Luego, $m(\mathcal{S}) \subseteq \sigma(\mathcal{S})$.

La parte difícil del teorema es mostrar que $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq m(\mathcal{S})$. Para ello, es suficiente mostrar que $m(\mathcal{S})$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{S}$.

1.-) Sea $E \in \mathcal{S}$, y consideremos el conjunto

$$\mathcal{G}(E) = \{F \in m(\mathcal{S}) : \; E - F, E \cap F, F - E \in m(\mathcal{S})\}.$$

Afirmamos que $E \in \mathcal{S} \implies m(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{G}(E)$.

El Teorema de Clases Monótonas

Para probar esto, tomamos $E \in \mathcal{S}$. Mostraremos que

i) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}(E)$,

ii) $\mathcal{G}(E)$ es una clase monótona.

(i) Sea $H \in \mathcal{S}$. Como $\mathcal{S} \subseteq m(\mathcal{S})$ y como $\mathcal{S}$ es cerrada bajo complementos, entonces $E, E^C, H, H^C \in \mathcal{S} \subseteq m(\mathcal{S})$.

Ahora, como $m(\mathcal{S})$ es una clase monótona, tomemos la secuencia monótona $\{A_k\}_k$, donde

- $A_1 = E$, $A_k = E - H = E \cap H^C$, para todo $k \geq 2$. Entonces $\lim_k A_k = E - H \in m(\mathcal{S})$.
- $A_1 = H$, $A_k = H - E = H \cap E^C$, para todo $k \geq 2$. Entonces $\lim_k A_k = H - E \in m(\mathcal{S})$.
- $A_1 = E$, $A_k = E \cap H$, para todo $k \geq 2$. Entonces $\lim_k A_k = E \cap H \in m(\mathcal{S})$.

Portanto, $H \in \mathcal{G}(E)$. Esto muestra que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}(E)$.

El Teorema de Clases Monótonas

(iia) Sea $\{H_k\}_{k\geq 1}$ una secuencia ascendente en $\mathcal{G}(E)$, con $H_k \nearrow H = \bigcup_k H_k$. Como los $H_k \in \mathcal{G}(E)$, entonces $E - H_k, E \cap H_k, H_k - E \in m(\mathcal{S})$, $\forall k$.

Pero, $H_k \nearrow H \implies E - H_k \searrow E - H,\; E \cap H_k \nearrow E \cap H,\; H_k - E \nearrow H - E$ (verificar esto!!)

Siendo $m(\mathcal{S})$ clase monótona, entonces $E - H, E \cap H, H - E \in m(\mathcal{S})$, lo que muestra que $H \in \mathcal{G}(E)$. Portanto, $\mathcal{G}(E)$ es cerrada bajo secuencias ascendentes.

(iib) Sea $\{H_k\}_{k\geq 1}$ una secuencia descendente en $\mathcal{G}(E)$, con $H_k \searrow H = \bigcap_k H_k$. $E - H_k, E \cap H_k, H_k - E \in m(\mathcal{S})$, $\forall k$.

Pero, $H_k \searrow H \implies E - H_k \nearrow E - H,\; E \cap H_k \searrow E \cap H,\; H_k - E \searrow H - E$ (verificar!)

Como $m(\mathcal{S})$ es clase monótona, tenemos que $E - H, E \cap H, H - E \in m(\mathcal{S})$. Luego, $H \in \mathcal{G}(E)$ y $\mathcal{G}(E)$ es cerrada bajo secuencias descendentes.

Portanto, $E \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; \mathcal{G}(E)$ es una clase monótona.

El Teorema de Clases Monótonas

De lo anterior, si $E \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{G}(E)$ es una clase monótona conteniendo a $\mathcal{S}$. Portanto, $(S) \subseteq \mathcal{G}(E)$.

2.-) Extendemos la propiedad anterior a conjuntos en $m(\mathcal{S})$. Esto es, si $E \in (\mathcal{S})$, consideramos el conjunto

$$\mathcal{G}(E) = \{F \in m(\mathcal{S}) :\ E - F, E \cap F, F - E \in m(\mathcal{S})\}.$$

Afirmamos que $E \in m(\mathcal{S}) \implies m(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{G}(E)$.
Para probar esto, tomamos $E \in m(\mathcal{S})$. Mostraremos que

i) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}(E)$,
ii) $\mathcal{G}(E)$ es una clase monótona.

(i) Sea $H \in \mathcal{S}$. Entonces, $H \in m(\mathcal{S})$. Por otro lado, como $\mathcal{S} \subseteq m(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{G}(H)$, tenemos que $E \in \mathcal{S} \ \Rightarrow\ E \in \mathcal{G}(H)$. De ahí que $E - H, E \cap H, H - E \in m(\mathcal{S})$.

Esto muestra que $H \in \mathcal{G}(E)$, y portanto $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}(E)$.

El Teorema de Clases Monótonas

(iia) Sea $\{H_k\}_{k\geq 1}$ una secuencia ascendente en $\mathcal{G}(E)$, con $H_k \nearrow H = \bigcup_k H_k$. Como los $H_k \in \mathcal{G}(E)$, entonces $E - H_k, E \cap H_k, H_k - E \in m(\mathcal{S})$, $\forall k$.

Pero, $H_k \nearrow H \implies E - H_k \searrow E - H,\ E \cap H_k \nearrow E \cap H,\ H_k - E \nearrow H - E$ (verificar!)

Siendo $m(\mathcal{S})$ clase monótona, entonces $E - H, E \cap H, H - E \in m(\mathcal{S})$, lo que muestra que $H \in \mathcal{G}(E)$. Portanto, $\mathcal{G}(E)$ es cerrada bajo secuencias ascendentes.

(iib) Sea $\{H_k\}_{k\geq 1}$ una secuencia descendente en $\mathcal{G}(E)$, con $H_k \searrow H = \bigcap_k H_k$.
$E - H_k, E \cap H_k, H_k - E \in m(\mathcal{S})$, $\forall k$.

Pero, $H_k \searrow H \implies E - H_k \nearrow E - H,\ E \cap H_k \searrow E \cap H,\ H_k - E \searrow H - E$ (verificar!)

Como $m(\mathcal{S})$ es clase monótona, tenemos que $E - H, E \cap H, H - E \in m(\mathcal{S})$. Luego, $H \in \mathcal{G}(E)$ y $\mathcal{G}(E)$ es cerrada bajo secuencias descendentes.

Portanto, $E \in m(\mathcal{S}) \ \Rightarrow\ \mathcal{G}(E)$ es una clase monótona.

El Teorema de Clases Monótonas

3.-) Mostramos ahora que $m(\mathcal{S})$ es una σ-álgebra en X.

- $X \in m(\mathcal{S})$, ya que $m(\mathcal{S})$ es una clase monótona.
  En particular, de la parte (2.) $m(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{G}(X)$.
  Observe que la colección
  $$\mathcal{G}(X) = \{F \in m(\mathcal{S}) :\ F \cap X, F - X, X - F \in m(\mathcal{S})\} = \{F \in m(\mathcal{S}) :\ F, F^c, \varnothing \in m(\mathcal{S})\}.$$
- Si $E \in m(\mathcal{S})$, entonces $E \in \mathcal{G}(X)$. Luego, $E^c \in m(\mathcal{S})$.
- Si $E, F \in m(\mathcal{S})$, entonces $E, F \in \mathcal{G}(E)$ (por la parte (2)). De ahí que $E \cap F \in m(\mathcal{S})$.

Esto muestra que $m(\mathcal{S})$ es un álgebra. (Portanto, cerrada bajo uniones finitas).

- Ahora, si $\{A_n\}_{n\geq 1}\mathcal{S})$ es una secuencia en $m(\mathcal{S})$, consideremos las secuencias de uniones parciales
  $$E_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k, \qquad \text{para } k \geq 1.$$
  Tenemos que $\{E_k\}_{k\geq 1} \subseteq m(\mathcal{S})$, y E_k es una secuencia monótona. Como $m(\mathcal{S})$ es una clase monótona, entonces $\lim E_k = \bigcup_n A_n \in m(\mathcal{S})$.

El Teorema de Clases Monótonas

Esto muestra que $m(\mathcal{S})$ es cerrada bajo uniones enumerables, y portanto $m(\mathcal{S})$ es una σ-álgebra.

(4.-) Finalmente, como $\mathcal{S} \subseteq m(\mathcal{S})$ y $m(\mathcal{S})$ es una σ-álgebra, entonces $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq m(\mathcal{S})$. Esto muestra que $\sigma(\mathcal{S}) = m(\mathcal{S})$, lo que concluye el teorema. $\square$

El Teorema de Clases Monótonas

Corolario

Sea $\mathcal{S}$ una colección de conjuntos en X que es cerrada bajo complementos e intersecciones finitas (un álgebra en X). Entonces, si $\mathcal{M}$ es una clase monótona tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$, entonces $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}$.

Prueba: Se sigue de forma directa a partir del Teorema de Clases Monótonas. $\square$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Corolario

Sea $\mathcal{S}$ una colección de subconjuntos de X, que es cerrada bajo complementos e intersecciones finitas (esto es, $\mathcal{S}$ ea un álgebra en X). Sea $\mathcal{M}$ una clase monótona en X tal que $\mathcal{S} \subseteq$. Entonces, $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}$.

Prueba: Se sigue directamente del Teorema de Clases Monótonas. $\square$

Definición

*Sea X conjunto no vacío. Una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X se llama un **sistema de Dynkin** (un λ-**sistema** o un **d-sistema**), si satisface:*

i) $X \in \mathcal{D}$,

ii) $A \in \mathcal{D} \implies A^c \in \mathcal{D}$,

iii) *Si $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{D}$, son disjuntos a pares ($A_i \cap A_j = \varnothing$, para $i \neq j$), entonces la unión disjunta $\bigcup_k A_k \in \mathcal{D}$.*

Observaciones:

- Toda σ-álgebra en X es un λ-sistema.
- No toda álgebra de conjuntos en X es un λ-sistema.

Teorema (Teorema-Definición)

Sea X conjunto no vacío, y sea $\mathcal{S}$ cualquier colección de subconjuntos de X. Existe un λ-sistema $\delta(\mathcal{S})$ en X tal que

a) $\mathcal{S} \subseteq \delta(\mathcal{S})$,

b) si $\mathcal{D}$ es otro λ-sistema en X tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$, entonces $\delta(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{D}$.

*$\lambda(\mathcal{S})$ se llama el **λ-sistema generado** por $\mathcal{S}$.* $\square$

Proposición

El λ-sistema generado satisface las siguientes propiedades:

- $\mathcal{S} \subseteq \delta(\mathcal{S})$,
- si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\delta(\mathcal{S}) \subseteq \delta(\mathcal{T})$,
- $\delta(\delta(\mathcal{S})) = \delta(\mathcal{S})$,
- si $\mathcal{S}$ es un λ-sistema, entonces $\delta(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$,
- $\delta(\mathcal{S}) \subseteq \sigma(\mathcal{S})$.

Definición

Sea X conjunto no vacío. Una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X se llama un ***π-sistema*** *si satisface:*

i) $\mathcal{F} \neq \varnothing$,

ii) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$.

Observaciones:

- Toda σ-álgebra en X es un π-sistema.
- Toda álgebra de conjuntos en X es un π-sistema.

Teorema (Teorema-Definición)

Sea X conjunto no vacío, y sea $\mathcal{S}$ cualquier colección de subconjuntos de X. Existe un π-sistema $\pi(\mathcal{S})$ en X tal que

a) $\mathcal{S} \subseteq \pi(\mathcal{S})$,

b) si $\mathcal{F}$ es otro π-sistema en X tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\pi(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{F}$.

*$\pi(\mathcal{S})$ se llama el **π-sistema generado** por $\mathcal{S}$.*

Proposición

El π-sistema generado satisface las siguientes propiedades:

i) $\mathcal{S} \subseteq \pi(\mathcal{S})$,

ii) *si* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, *entonces* $\pi(\mathcal{S}) \subseteq \pi(\mathcal{T})$,

iii) $\pi(\pi(\mathcal{S})) = \pi(\mathcal{S})$,

iv) *si* $\mathcal{S}$ *es un* π*-sistema, entonces* $\pi(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

π-sistemas

Lemma

Un sistema de Dynkin $\mathcal{D}$ en X es una σ-álgebra $\iff$ es cerrado bajo intersecciones finitas (esto es, $A, B \in \mathcal{D} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{D}$).

Prueba: Ejercicio! $\square$

Teorema

Sea $\mathcal{S}$ una colección de subconjuntos en X. Si $\mathcal{S}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, entonces $\delta(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{S})$.

Prueba: Ejercicio! $\square$

Observaciones:

- $\mathcal{F}$ es σ-álgebra $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ es λ-sistema y es π-sistema.
- $\mathcal{F}$ es λ-sistema + π-sistema $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ es σ-álgebra.

Teorema (Teorema π-λ)

Sea X un conjunto no vacío. Si $\mathcal{P}$ es un π-sistema en X, y $\mathcal{D}$ es un λ-sistema en X, con $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{D}$, entonces $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{D}$.

Prueba: Ejercicio! $\square$