σ-Álgebras and Friends

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 10) 15.febrero.2023

Estructuras Fundamentales

Motivados por la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, queremos desarrollar la teoría necesaria para construir otras medidas.

Para ello, antes debemos desarrollar las estructuras y la teoría necesaria que nos permita hacer esto de forma sistemática.

Definición

*Sea X un conjunto no vacío. Una σ**-álgebra** $\mathcal{A}$ en X es una colección de subconjuntos de X que satisface:*

i) $X \in \mathcal{A}$,

ii) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$,

iii) $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{A} \implies \bigcup_k A_k \in \mathcal{A}$.

A los elementos de la σ-álgebra $\mathcal{A}$ les llamamos **conjuntos $\mathcal{A}$-mesurables**. La estructura $(X, \mathcal{A})$ suele llamarse un **espacio mesurable**.

Proposición

Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra en X, entonces

i) $\varnothing \in \mathcal{A}$.

ii) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$.

iii) $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{A} \implies \bigcap_k A_k \in \mathcal{A}$.

iv) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$.

v) $A, B \in \mathcal{A} \implies A - B \in \mathcal{A}$.

Prueba: Las propiedades son inmediatas a partir de las condiciones (i)-(iii) de una σ-álgebra. (Verificar!). $\square$

Ejemplos

Ejemplo 1: El conjunto potencia $\mathcal{P}(X) = 2^X$ es una σ-álgebra en X (es la σ-álgebra máxima).

Ejemplo 2: El conjunto $\{\varnothing, X\}$ es una σ-álgebra en X (esta es la σ-álgebra mínima).

Ejemplo 3a: Sea X conjunto no vacío, y sea $A \subseteq X$, con $\varnothing \subsetneq A \subsetneq X$. Entonces

- $\mathcal{A} = \{\varnothing, A, A^c, X\}$ es una σ-álgebra en X.
- $\mathcal{B} = \{\varnothing, A, X\}$ no es una σ-álgebra.

Ejemplo 3b: Sea X conjunto no vacío, y sea $A, B \subseteq X$, con $\varnothing \subsetneq A \subsetneq X$. ¿Cómo debería verse una σ-álgebra que contiene tanto a A y a B?

- $$\mathcal{A} = \{\varnothing, A, B, A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B, A^c \cap B^c,\\ X, A^c, B^c, A^c \cup B^c, A^c \cup B, A \cup B^c, A \cup B\}.$$

Ejemplo 3c: ¿Y si debe contener a $A, B, C \subseteq X$, subconjuntos distintos?

Ejemplos

Ejemplo 4: En el caso general, si $\mathcal{A}$ debe contener a k conjuntos $A_k \subseteq X$, (llamados **átomos**), se puede mostrar que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra finita, y que su cardinalidad no excede a

$$|\mathcal{A}| \leq 2^{2^k}.$$

(de hecho, $\mathcal{A}$ es similar a un álgebra booleana con k átomos).

Ejemplo 5: Sea X un conjunto no vacío. Entonces

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : \ A \text{ es enumerable o } A^c \text{ es enumerable}\}.$$

es una σ-álgebra.

Prueba: (i) $X \in \mathcal{A}$, ya que $X^c = \varnothing$ es enumerable.
(ii)

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{A} \quad &\Longrightarrow \quad A \text{ es enumerable o } A^c \text{ es enumerable} \\ &\Longrightarrow \quad (A^c)^c \text{ es enumerable o } A^c \text{ es enumerable} \\ &\Longrightarrow \quad A^c \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Ejemplos

(iii) Tenemos dos casos:

(a) Si todos los A_k son enumerables, entonces la unión $\bigcup_k A_k$ es un conjunto enumerable, ya que es una unión enumerable de conjuntos enumerables. En ese caso, $\bigcup_k A_k \in \mathcal{A}$.

(b) Si para algún índice $j \geq 1$, A_j es no enumerable, entonces A_j^c debe ser enumerable. En particular, la intersección $\bigcap_k A_k^c \subseteq A_j^c$, y portanto debe ser un conjunto enumerable. Como $\left(\bigcup_k A_k\right)^c = \bigcap_k A_k^c$ es enumerable, entonces $\bigcup_k A_k \in \mathcal{A}$.

Esto muestra que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de X. $\square$

Construcción de nuevas σ-álgebras

Hay varios mecanismos que permiten construir nuevas σ-álgebras a partir de otras.

Traza: Sea $E \subseteq X$, y sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en X. La colección

$$\mathcal{A}_E = \mathcal{A} \cap E = \{A \cap E : \; A \in \mathcal{A}\},$$

es una σ-álgebra en E, llamada la **traza** de $\mathcal{A}$ en E.

Prueba: Ejercicio!

Pullback: Sean $X, \widetilde{X}$ conjuntos no vacíos, sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en $\widetilde{X}$, y sea $f : X \to \widetilde{X}$ una función cualquiera. La colección

$$f^{-1}(\mathcal{A}) = \{f^{-1}(A) : \; A \in \mathcal{A}\},$$

es una σ-álgebra en X. $f^{-1}(\mathcal{A})$ se llama el **pullback** de $\mathcal{A}$ por f.

Prueba: Ejercicio!

Construcción de nuevas σ-álgebras

Pushforward: Sean $X, \widetilde{X}$ conjuntos no vacíos, sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en X, y sea $f : X \to \widetilde{X}$ una función cualquiera. La colección

$$f^{\sharp}(\mathcal{A}) = \{B \in \widetilde{X} :\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\},$$

es una σ-álgebra en $\widetilde{X}$. $f^{\sharp}(\mathcal{A})$ se llama el **pushforward** de $\mathcal{A}$ por f.

Prueba: Ejercicio!

Nota: En lo anterior, es interesante observar que si definimos la estructura

$$f(\mathcal{A}) = \{f(A) \in \widetilde{X} :\ A \in \mathcal{A}\},$$

esta colección no siempre define una σ-álgebra en $\widetilde{X}$.

Construcción de nuevas σ-álgebras

Intersecciones:

Teorema

La intersección arbitraria $\bigcap_{\ell\in\Lambda}\mathcal{F}_\ell$ de σ-álgebras $\mathcal{F}_\ell$ en X, es una σ-álgebra en X.

Prueba:

i) $X\in\mathcal{F}_\ell$, para todo $\ell\in\Lambda$. Luego, $X\in\bigcap_\ell\mathcal{F}_\ell$.

ii) Sea $A\in\bigcap_\ell\mathcal{F}_\ell$. Entonces $A\in\mathcal{F}_\ell$, para todo $\ell\in\Lambda$. Luego, como cada $\mathcal{F}_\ell$ es σ-álgebra, tenemos que $A^c\in\mathcal{F}_\ell$, para todo $\ell\in\Lambda$. Portanto, $A^c\in\bigcap_\ell\mathcal{F}_\ell$.

iii) Sea $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, una colección enumerable de conjuntos en $\bigcap_\ell\mathcal{F}_\ell$. De nuevo, $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\in\mathcal{F}_\ell$, para todo $\ell\in\Lambda$. Como cada $\mathcal{F}_\ell$ es σ-álgebra, tenemos que $\bigcup_i A_i\in\mathcal{F}_\ell$, para todo $\ell\in\Lambda$. Portanto, $\bigcup_i A_i\in\bigcap_\ell\mathcal{F}_\ell$. $\square$

Teorema

Sea X conjunto no vacío, y sea $\mathcal{S}$ cualquier colección de subconjuntos de X. Existe una σ-álgebra $\mathcal{A}$ en X tal que

a) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$,
b) si $\mathcal{G}$ es otra σ-álgebra en X tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$.

Prueba: Consideramos la familia de todas las σ-álgebras de X que contienen a $\mathcal{S}$:

$$\Phi = \{\mathcal{F} : \ \mathcal{F} \text{ es } \sigma\text{-álgebra de } X, \ \text{y } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}\}.$$

Ya vimos que $\Phi \neq \varnothing$. Definimos $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S}) = \bigcap \Phi = \bigcap_{\mathcal{F}\in\Phi} \mathcal{F}$. Observe que $\sigma(\mathcal{S})$ es una σ-álgebra en X, por ser intersección de σ-álgebras, y además $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$.

Si $\mathcal{G}$ es alguna σ-álgebra en X con $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G}$ es uno de los elementos en Φ, de modo que $\sigma(\mathcal{S}) = \bigcap \Phi \subseteq \mathcal{G}$. $\square$

Proposición

Sea X conjunto no vacío, y $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ colecciones de subconjuntos de X. La σ-álgebra generada satisface las siguientes propiedades:

i) $\mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$,

ii) *si* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, *entonces* $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \sigma(\mathcal{T})$,

iii) $\sigma(\sigma(\mathcal{S})) = \sigma(\mathcal{S})$,

iv) *si* $\mathcal{S}$ *es una* σ*-álgebra, entonces* $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

Prueba: Ejercicio! $\square$

Ejemplo: ¿Cuál es la σ-álgebra generada por $\{A\}$?, donde $\varnothing \subsetneq A \subsetneq X$.

σ-álgebras Generadas:

Recordemos la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$, la cual se define como la menor σ-álgebra que contiene a los abiertos de $\mathbb{R}^n$ (en la topología usual).

Si denotamos

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) &= \{U : U \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n\}, \\ \mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) &= \{C : C \text{ es cerrado en } \mathbb{R}^n\}, \\ \mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) &= \{K : K \text{ es compacto en } \mathbb{R}^n\}; \end{aligned}$$

Entonces el álgebra de Borel corresponde a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\big(\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)\big) = \sigma(\mathcal{O})$.

Teorema

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{K})$.

Prueba: Por definición, sabemos que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{O})$.

σ-álgebras Generadas:

Sabemos que $\mathcal{C} = \mathcal{O}^c = \{U^c : \ U \in \mathcal{O}\} \subseteq \sigma(\mathcal{O})$. De forma similar, sabemos que $\mathcal{O} = \mathcal{C}^c = \{F^c : \ F \in \mathcal{C}\} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$.

De la primera inclusión obtenemos $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{O})$. De la segunda, $\sigma(\mathcal{O}) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$. Portanto, tenemos la igualdad $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{O})$.

En $\mathbb{R}^n$, todo compacto es cerrado (Heine-Borel). Luego $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}$. Por otro lado, si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado, entonces C puede escribirse como unión enumerable de compactos $C = \bigcup_k C_k$, donde $C_k = \overline{\mathbb{D}}_k(0) \cap C$. Esto muestra que $C \subseteq \sigma(\mathcal{K}) \Rightarrow \mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{K}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{K})$. Esto prueba la igualdad $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{K})$. $\square$

Observación: Existen otras formas de generar el álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$. Definamos

σ-álgebras Generadas:

- La familia de intervalos abiertos $\mathcal{J}^\circ$:

$$\mathcal{J}^\circ = \mathcal{J}^{\circ,n} = \mathcal{J}^\circ(\mathbb{R}^n) = \Big\{ \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) : \; a_i < b_i \Big\}.$$

- La familia de intervalos semi-abiertos $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}^{n} = \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) = \Big\{ \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) : \; a_i < b_i \Big\}.$$

- La familia de intervalos abiertos con extremos racionales $\mathcal{J}^\circ_{\mathbb{Q}}$:

$$\mathcal{J}^\circ_{\mathbb{Q}} = \mathcal{J}^{\circ,n}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{J}^\circ_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n) = \Big\{ \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) : \; a_i, b_i \in \mathbb{Q}; \; a_i < b_i \Big\}.$$

Teorema

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{J}^\circ) = \sigma(\mathcal{J}) = \sigma(\mathcal{J}^\circ_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\mathcal{J}_{\mathbb{Q}})$.

Definición

*Sea X un conjunto no vacío. Una **semi-álgebra** $\mathcal{A}$ en X es una colección de subconjuntos de X que satisface:*

i) $X \in \mathcal{A}$,

ii) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$,

iii) *para todo* $A \in \mathcal{A}$, *existen* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, *tales que* $A^c = \bigcup_k A_k$.

Definición

*Sea X un conjunto no vacío. Un **álgebra** $\mathcal{A}$ en X es una colección de subconjuntos de X que satisface:*

i) $X \in \mathcal{A}$,

ii) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$,

iii) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$.

Proposición

$\mathcal{A}$ σ-álgebra $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ es álgebra $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ es semi-álgebra. $\square$