Caracterizaciones de Mesurabilidad

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 09) 13.febrero.2023

Mesurabilidad: Caracterizaciones

Recordemos la definición de mesurabilidad en $\mathbb{R}^n$:

$$E \subseteq \mathbb{R}^n \text{ es mesurable } \iff \forall \varepsilon > 0, \exists G \subseteq \mathbb{R}^n \text{ abierto, con } E \subseteq G \text{ y } |G - E|_e < \varepsilon.$$

La definición anterior, caracteriza a un conjunto mesurable E en función de la existencia de ciertos conjuntos abiertos (aquellos que en medida son muy similares a E).

Proposición

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ es mesurable $\iff \forall \varepsilon > 0$, existe $F \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado, tal que $F \subseteq E$ y $|E - F|_e < \varepsilon$.

Prueba:

$$\begin{aligned}
E \text{ es mesurable } &\iff E^c \text{ es mesurable} \\
&\iff \forall \varepsilon > 0, \exists G \text{ abierto, con } E^c \subseteq G \text{ y } |G - E^c|_e < \varepsilon \\
&\iff \forall \varepsilon > 0, \exists F = G^c \text{ cerrado, con } E \supseteq F \text{ y} \\
&\qquad |E - F|_e = |E - G^c|_e = |E \cap G|_e = |G \cap (E^c)^c|_e = |G - E^c|_e < \varepsilon. \quad \square
\end{aligned}$$

Teorema

i) $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *es mesurable* $\iff E = H - Z$*, donde* H *es de tipo* G_δ *y* $|Z| = 0$.

ii) $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *es mesurable* $\iff E = K \cup Z$*, donde* K *es de tipo* F_σ *y* $|Z| = 0$.

Prueba: ($\Leftarrow$) Observe que si E admite alguna de las representaciones en (i) o (ii), entonces E es mesurable, pues los G_δ y los F_σ son mesurables, y los conjuntos de medida nula también son mesurables. Además, la mesurabilidad se preserva bajo uniones y diferencias.

($\Rightarrow$) (i) Suponga que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es mesurable. Para cada $k = 1, 2, 3, \ldots$, elija G_k abierto tal que $E \subseteq G_k$ y $|G_k - E|_e < \frac{1}{k}$. Tomamos $H = \bigcap_k G_k$.
Entonces H es un conjunto de tipo G_δ y $E \subseteq H$. Además, haciendo $Z = H - E$, tenemos que $H \subseteq G_k \; \forall k \;\Rightarrow\; H - E \subseteq G_k - E \; \forall k$, de modo que $|H - E|_e \leq |G_k - E| < \frac{1}{k}$, $\forall k$. Portanto, $|H - E|_e = 0$.
Finalmente, $H - Z = H - (H - E) = H \cap (H \cap E^c)^c = H \cap (H^c \cup E) = H \cap E = E$.

Mesurabilidad: Caracterizaciones

($\Rightarrow$) (ii) De nuevo, suponga que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es mesurable, por lo que E^c también es mesurable. De la parte (i), podemos escribir

$$E^c = H - Z = H \cap Z^c, \text{ donde } H \text{ es de tipo } G_\delta \text{ y } |Z| = 0.$$

En particular, siendo $H = \bigcap_k G_k$ una intersección de abiertos, su complemento $K = H^c = \bigcup_k G_k^c$ es una unión de cerrados, y portanto un conjunto F_σ. con $E^c \subseteq H \;\Rightarrow\; K \subseteq E^c$, y

$$E = (E^c)^c = (H - Z)^c = (H \cap Z^c)^c = H^c \cup Z = K \cup Z. \;\square$$

Mesurabilidad: Caracterizaciones

Teorema

Suponga que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *es tal que* $|E|_e < \infty$*. Entonces, E es mesurable* $\iff$ *dado* $\varepsilon > 0$*, E puede representarse como* $E = (S \cup N_1) - N_2$*, donde*

- *S es una unión enumerable de intervalos no traslapados.*
- N_1, N_2 *satisfacen* $|N_1|_e, |N_2|_e < \varepsilon$.

Prueba: Ejercicio!

Nuestra última caracterización para la mensurabilidad de conjuntos establece que los conjuntos mesurables son aquellos que dividen cada conjunto (medible o no) en partes que son aditivas con respecto a la medida exterior.

Esta caracterización será utilizada más adelante para construir medidas en espacios abstractos.

Mesurabilidad: Caracterizaciones

Teorema (Carathéodory)

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ es mesurable $\iff$ para todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ vale

$$|A|_e = |A \cap E|_e + |A - E|_e.$$

Prueba: ($\Rightarrow$) Suponga que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es mesurable. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se H un conjunto de tipo G_δ tal que $A \subseteq H$ y $|A|_e = |H|_e$.

Como $H = (H \cap E) \cup (H - E)$ es una unión disjunta, entonces $|H| = |H \cap E| + |H - E|$. Luego, como $A \subseteq H$

$$|A|_e = |H|_e = |H| = |H \cap E| + |H - E| \geq |A \cap E|_e + |A - E|_e.$$

Por otro lado, de la unión $A \subseteq (A \cap E) \cup (A - E)$, tenemos

$$|A|_e \leq \big|(A \cap E) \cup (A - E)\big|_e = |A \cap E|_e + |A - E|_e,$$

lo que muestra la igualdad.

($\Leftarrow$) Suponga ahora que $|A|_e = |A \cap E|_e + |A - E|_e$, para todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Mesurabilidad: Caracterizaciones

- En el caso que $|E|_e < \infty$, elijamos $H \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto de tipo G_δ tal que $E \subseteq H$ y $|H| = |H|_e = |E|_e$. Luego,
$$|H| = |H \cap E|_e + |H - E|_e = |E|_e + |H - E|_e,$$
(por la hipótesis). Esto implica que $|H - E|_e = 0$, de modo que $H - E$ es mesurable, y $E = H - (H - E)$ es mesurable, ya que es diferencia de mesurables.

- En el caso $|E|_e = \infty$, consideremos las interserciones $E_k = \overline{\mathbb{D}}_k(0) \cap E$, para cada $k = 1, 2, \ldots$. Estos son limitados ($\Rightarrow$ medida finita). Ya hemos visto que $E = \bigcup_k E_k$. Para cada $k \geq 1$, sea H_k de tipo G_δ tal que $E_k \subseteq H_k$ y $|H_k| = |E_k|_e$. Por la hipótesis,
$$|H_k| = |H_k|_e = |H_k \cap E|_e + |H_k - E|_e \geq |E_k|_e + |H_k - E|_e, \qquad \forall k.$$
De ahí que $|H_k - E|_e = 0$ y todos los $H_k - E$ son mesurables. También la unión $H = \bigcup_k H_k$ es mesurable,y $E = \bigcup E_k \subseteq H_k = H$. Además,
$$H - E = \big(\cup_k H_k \big) - E = \cup_k (H_k - E)$$
es también mesurable, ya que es unión enumerable de mesurables. Finalmente, $E = H - (H - E)$ es mesurable. $\square$

Mesurabilidad: Caracterizaciones

Corolario

Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es mesurable y $E \subseteq A$, entonces $|A|_e = |E| + |A - E|_e$. En particular, si $|E| < \infty$, entonces $|A - E|_e = |A|_e - |E|$.

Prueba: Suponga que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es mesurable, y sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $E \subseteq A$. Entonces, elijamos un conjunto $H \subseteq \mathbb{R}^n$ de tipo G_δ tal que $A \subseteq H$ y $|H| = |H|_e = |A|_e$.
Siendo H mesurable, y como $H = (H \cap E) \cup (H - E)$, entonces

$$||A|_e| = |H| = |H \cap E| + |H - E| = |H \cap E|_e + |H - E|_e \geq |A \cap E|_e + |A - E|_e.$$

Por otro lado, de la inclusión $A \subseteq (A \cap E) \cup (A - E)$, tenemos

$$|A|_e \leq |A \cap E|_e + |A - E|_e,$$

lo que muestra la igualdad. $\square$

Nos interesa identificar mapas $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que preservan la mesurabilidad:

$$E \text{ es Lebesgue-mesurable} \quad \Longrightarrow \quad T(E) \text{ es Lebesgue-mesurable.}$$

Recordemos que

Definición

*Un mapa $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una **transformación Lipschitz**, si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})| \leq C|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \qquad \textit{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

A la constante

$$C_T = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \frac{|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|},$$

*se le llama la **constante de Lispchitz** de T.*

Ejemplo: Toda aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz (ejercicio!).

Teorema (Conservación de la mesurabilidad)

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación Lipschitz. Entonces, T mapea conjuntos Lebesgue-mesurables en conjuntos Lebesgue-mesurables.

Prueba: 1. Mostramos primero que toda transformación continua mapea conjuntos F_σ en conjuntos F_σ.

Sabemos que una transformación continua mapea compactos en compactos. Como todo cerrado puede escribirse como una unión enumerable de compactos ($F = \bigcup_k F_k$, con $F_k = \overline{\mathbb{D}}_k(0) \cap F$), entonces

$$T(F) = T\Big(\bigcup_{k\geq 1} F_k\Big) = \bigcup_{k\geq 1} T(F_k),$$

es unión enumerable de compactos (poratnto de cerrados). En particular, $T(F)$ es de tipo F_σ.

Así, T mapea cerrados en F, y en particular T mapea conjuntos F_σ en conjuntos F_σ.

Transformaciones

2. Mostramos ahora que una transformación Lipschitz mapea conjuntos de media nula en conjuntos de medida nula.
De la desigualdad $|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})| \leq C|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, tabemos que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene diámetro $\operatorname{diam}(A) = d$, entonces vale

$$\operatorname{diam} T(A) = \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y} \in A} |T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})| \leq C \cdot \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y} \in A} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = Cd.$$

En particular, en el caso de intervalos n-dimensionales I, tenemos que

$$v(TI) = v\Big(T\big(\prod(b_i - a_i)\big)\Big) \leq \prod C(b_i - a_i) = \widetilde{C}v(I),$$

Sea $Z \subseteq \mathbb{R}^k$ un conjutno de medida nula $|Z| = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos una cobertura $\{I_k\}_k$ de Z por intervalos tales que $\sum_k v(I_k) < \varepsilon$. Luego, $\{T(I_k)\}$ es una cobertura de $T(Z)$, y de lo anterior

$$|TZ|_e \leq \sum_k |T(I_k)| \leq \sum_k \widetilde{C}v(I_k) = \widetilde{C}\sum_k v(I_k) < \widetilde{C}\,\varepsilon.$$

Esto muestra que $T(Z)$ tiene medida nula.

3. Finalmente, si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es Lebesgue-mesurable, E admite una representación de la forma $E = K \cup Z$, con K un conjunto de tipo F_σ, y Z de medida nula.
Entonces, $T(E) = T(K \cup Z) = T(K) \cup T(Z)$, con $T(K)$ de tipo F_σ y $T(Z)$ de medida nula. De la caracterización de conjuntos mesurables, $T(E)$ es Lebesgue-mesurable. $\square$

En el caso particular en que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal, tenemos

Teorema

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Entonces, para cualquier conjunto mesurable $E \subseteq \mathbb{R}^n$, vale

$$|T(E)| = \delta\,|E|, \qquad \textit{donde } \delta = |\det T|.$$

Prueba: Ejercicio!

Lema

Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto Lebesgue-mesurable, con $|E| > 0$. Entonces, el conjunto de diferencias $\{d = \mathbf{x} - \mathbf{y} : \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in\}$ contiene un intervalo abierto centrado en 0.

Prueba: Sea $\varepsilon > 0$. Como $|E| > 0$, existe un abierto $G \subseteq \mathbb{R}$ tal que $E \subseteq G$ y $|G| \leq (1+\varepsilon)|E|$. Siendo G abierto, G puede escribirse como unión enumerable de intervalos no traslapados, $G = \bigcup_k I_k$ (Teorema de caracterización de los abiertos en $\mathbb{R}$).

Para cada $k \geq 1$, tome $E_k = E \cap I_k$. Se sigue que $E = E \cap G = E \cap \bigcup_k I_k = \bigcup_k (E \cap I_k) = \bigcup_k E_k$, que los E_k son mesurables, y que para índices distintos $j \neq k$, los conjuntos E_j y E_k poseen a lo sumo un punto en común. Así

$$|G| = \sum_k |I_k| \qquad \text{y} \qquad |E| = \sum_k |E_k|.$$

Como $|G| \leq (1+\varepsilon)|E|$, entonces existe $k_0 \in$ tal que $|I_{k_0}| \leq (1+\varepsilon)|E_{k_0}|$.

Conjuntos no Mesurables

Tome$\varepsilon = \frac{1}{3}$. Entonces $E_{k_0} \subseteq I_{k_0}$ y $|E_{k_0}| \geq \frac{3}{4}|I_{k_0}|$. Afirmamos que si trasladamos E_{k_0} por cualquier número d con $d < \frac{1}{2}|I_{k_0}|$, entonces el conjunto trasladado $E_d = E_{k_0} + d$ interseca a E_{k_0} .

Suponga que no vale la afirmación. Entonces $E_{k_0} \cup E_d$ debe contener un intervalo de longitud $|I_{k_0}| + |d|$, lo que implica que

$$|E_{k_0}| + |E_d| \leq |I_{k_0}| + |d| \qquad \text{ó} \qquad 2|E_{k_0}| \leq \tfrac{3}{2}|I_{k_0}|.$$

Pero esta última desigualdad es falsa si $|d| \leq \frac{1}{2}|I_{k_0}|$, pues entonces $2|E_{k_0}| \leq \frac{3}{2}|I_{k_0}|$, y $|E_{k_0}| < \frac{3}{4}|I_{k_0}|$ $(\rightarrow\leftarrow)$.

Esto muestra la afirmación y el lema. $\square$

Conjuntos no Mesurables

Teorema (de Vitali)

Existen conjuntos no Lebesgue-mesurables.

Prueba: Definimos una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$, diciendo que

$$\mathbf{x} \text{ es equivalente a } \mathbf{y} \iff \mathbf{x}-\mathbf{y} \in \mathbb{Q}.$$

El conjunto cociente es $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Las clases de equivalencia son de la forma $E_{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbb{Q} = \{\mathbf{x} + q : \ q \in \mathbb{Q}\}$, y sabemos que dos clases son disjuntas o son iguales. Así, una clase consiste de los números racionales ($E_0 = \mathbb{Q}$). Las otras consisten de clases disjuntas de números irracionales.

Por el Axioma de Zermelo, sea $E \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto formado exactamente por un representante de cada clase de equivalencia.
Como cualesquiera dos puntos de E deben diferir por un irracional, entonces $\{d = \mathbf{x} - \mathbf{y} : \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E\}$, no puede contener un intervalo alrededor de 0.

Conjuntos no Mesurables

Luego, E no es Lebesgue-mesurable, ó tenemos $|E|_e = 0$.

Ahora, como $\mathbb{R}$ se cocienta por sus clases de equivalencia, tenemos que $\mathbb{R} = \bigcup_{\mathbf{x}\in\mathbb{Q}}(E+\mathbf{x})$. Luego

$$|E| = 0 \implies |\mathbb{R}| = \Big|\bigcup_{\mathbf{x}\in\mathbb{Q}}(E+\mathbf{x})\Big| = \sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{Q}}|E+\mathbf{x}| = \sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{Q}}|E| = \sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{Q}} 0 = 0,$$

un absurdo. Esto muestra que $|E|_e > 0$ y portanto E no es Lebesgue-mesurable. $\square$

Corolario

Cualquier subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ con medida exterior positiva, contiene un conjunto no-mesurable.

Prueba: Basta tomar $A = \bigcup(A \cap E_{\mathbf{x}})$, donde los $E_{\mathbf{x}} = E + \mathbf{x}$ y E son los conjuntos y traslaciones usadas en el Teorema de Vitali. $\square$