Conjuntos Lebesgue Mesurables

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 08) 06.febrero.2023

Ejemplo 5: Todo cerrado $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es Lebesgue-mesurable.

Prueba: Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado. Separamos la prueba en dos casos:

- Si F es compacto, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $G \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto tal que
$$F \subseteq G \qquad \text{y} \qquad |G| \leq |F|_e + \varepsilon.$$
Como G es abierto y F cerrado, entonces $G - F$ es abierto. Entonces, $G - F$ puede escribirse como una unión enumerable disjunta de intervalos abiertos $G - F = \bigcup_k I_k$. En particular
$$|G - F|_e = |G - F| = \Big|\bigcup_k I_k\Big| \leq \sum_k |I_k|.$$
Mostramos ahora que $\sum_k |I_k| < \varepsilon$. Observe que $F \cup \bigcup_k I_k \subseteq G$, y como F y los I_k son todos disjuntos, entonces $|F|_e + \sum_k |I_k|_e = \big|F \cup \bigcup_k I_k\big| \leq |G|$, De ahí que
$$\sum_k |I_k| \leq |G| - |F|_e < \varepsilon.$$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Conjuntos Mesurables

- Para el caso general en que F es un cerrado arbitrario, consideremos las intersecciones

$$F_k = F \cap \overline{\mathbb{D}_k(0)} = \{\mathbf{x} \in F : \ ||\mathbf{x}|| \leq k\}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Cada F_k es cerrado, pues es la intersección de dos cerrados, y es limitado. Luego, todos los F_k son compactos, y del punto anterior, todos estos son Lebesgue-mesurables. Además,

$$\bigcup_{k \geq 1} F_k = \bigcup_{k \geq 1} (F \cap \overline{\mathbb{D}_k(0)}) = F \cap \Big(\bigcup_{k \geq 1} \overline{\mathbb{D}_k(0)} \Big) = F \cap \mathbb{R}^n = F.$$

Así, F es la unión enumerable de conjuntos mesurables. Portanto F es mesurable. $\square$

Ejemplo 6: El complemento E^c de cualquier conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mesurable, es Lebesgue-mesurable.

Prueba: Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mesurable. Para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, considemos abiertos $G_k \subseteq \mathbb{R}^n$ con

$$E \subseteq G_k \qquad \text{y} \qquad |G_k - E| < \tfrac{1}{k}.$$

Tomamos $H = \bigcup_{k \geq 1} G_k^c$. Entonces H es mesurable, por ser unión enumerable de cerrados.

Además, $E \subseteq G_k \; \forall k \; \Rightarrow \; G_k^c \subseteq E^c \; \forall k \; \Rightarrow \; H = \bigcup_{k \geq 1} G_k^c \subseteq E^c$.

Escribimos $E^c = H \cup (E^c - H) = H \cup Z$. Entonces, para cada $k \geq 1$

$$Z = E^c - H = E^c - \bigcup_k G_k^c \subseteq E^c - G_k^c = E^c \cap G_k = G_k \cap E^c = G_k - E,$$

y $|Z|_e \leq |G_k - E| < \frac{1}{k}$, para todo $k \geq 1$. Portanto $|Z|_e = 0$, y Z es mesurable. Así, $E^c = H \cup Z$ es unión de mesurables, y es mesurable.

Ejemplo 7: Toda intersección enumerable $E = \bigcap_{k \geq 1} E_k$ de conjuntos Lebesgue-mesurables $E_k \subseteq \mathbb{R}^n$, es Lebesgue-mesurable.

Prueba: Sea $E = \bigcap\limits_{k \geq 1} E_k$, donde los $E_k \subseteq \mathbb{R}^n$ son mesurables, para $k = 1, 2, 3, \ldots$. De la propiedad anterior, los E_k^c son todos mesurables, y portanto la unión enumerable $\bigcup\limits_k E_k^c$, es mesurable.

Luego,

$$E = \bigcap_{k \geq 1} E_k = \Big(\bigcup_{k \geq 1} E_k^c \Big)^c$$

es el complemento de un mesurable. Portanto es Lebesgue-mesurable. $\square$

Ejemplo 8: Si $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ son Lebesgue-mesurables, entonces $E_1 - E_2$ es Lebesgue-mesurable.

Preuba: De la propiedad anterior, si E_1, E_2 son mesurables, entonces E_2^c es también mesurable. De ahí que $E_1 - E_2 = E_1 \cap E_2^c$ corresponde a una intersección de mesurables. Portanto, es Lebesgue-mesurable.

Para mostrar la igualdad, observe que vale la unión disjunta $E_1 = E_2 \cup (E_1 - E_2)$, de modo que

$$|E_1|_e = |E_2|_e + |E_1 - E_2|_e.$$

Como todos estos conjuntos son mesurables, obtenemos

$$|E_1| = |E_1|_e = |E_2|_e + |E_1 - E_2|_e = |E_2| + |E_1 - E_2|,$$

de modo que $|E_1 - E_2| = |E_1| - |E_2|$. $\square$

Definición

*Sea X un conjunto no vacío. Una σ**-álgebra** $\mathcal{F}$ en X, es una colección de subconjuntos de X que satisface*

i) $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$,

ii) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$,

Nota: La propiedad de que $\varnothing, X \in \mathcal{F}$, se deduce de las propiedades (i) y (ii) en la defición. Basta tomar la colección vacía $L = \{\}$, y obtenemos que $\varnothing = \bigcup_{A_i \in L} A_i \in \mathcal{F}$. De (i), tenemos que $X = \varnothing^c \in \mathcal{F}$.

Proposición

La colección de conjuntos Lebesgue-mesurables de $\mathbb{R}^n$ es una σ-álgebra. $\square$

Proposición

Sea $\{E_k\}_{k\geq 1}$ una colección enumerable de conjuntos mesurables en $\mathbb{R}^n$. Entonces los conjuntos $\liminf_k E_k$ y $\limsup_k E_k$ son Lebesgue-mesurables.

Prueba: Basta recordar que

$$\liminf_k E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} E_k \qquad \text{y} \qquad \limsup_k E_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} E_k.$$

Luego, como intersecciones enumerables o uniones enumerables de mesurables son mesurables, se sigue el resultado. $\square$

Estructura de las sigma-álgebras

Las σ-álgebras de un conjunto no vacío X, también forman estructuras particulares.

Proposición

Sea X un conjunto no vacío, y sea $\{\mathcal{F}_\ell\}_{\ell\in\Lambda}$ una colección arbitraria de σ-álgebras de X. Entonces, la intersección $\mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F}_\ell$ es también una σ-álgebra.

Prueba: Mostramos las propiedades (i) y (ii) en la definición de σ-álgebra.

i) Sea $A \in \mathcal{F} = \bigcap_\ell \mathcal{F}_\ell$. Entonces $A \in \mathcal{F}_\ell$, para todo $\ell \in \Lambda$. Luego, como cada $\mathcal{F}_\ell$ es σ-álgebra, tenemos que $A^c \in \mathcal{F}_\ell$, para todo $\ell \in \Lambda$. Portanto, $A^c \in \bigcap_\ell \mathcal{F}_\ell = \mathcal{F}$.

ii) Sea $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{F}$, una colección enumerable de conjuntos en $\mathcal{F} = \bigcap_\ell \mathcal{F}_\ell$. De nuevo, $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq\in \mathcal{F}_\ell$, para todo $\ell \in \Lambda$. Como cada $\mathcal{F}_\ell$ es σ-álgebra, tenemos que $\bigcup_i A_i \in \mathcal{F}_\ell$, para todo $\ell \in \Lambda$. Portanto, $\bigcup_i A_i \in \bigcap_\ell \mathcal{F}_\ell = \mathcal{F}$.

Esto muestra que la intersección $\mathcal{F} = \bigcap_\ell \mathcal{F}_\ell$ es también σ-álgebra de X. $\square$

Obs! Contrario a la propiedad que acabamos de mostrar, la unión de σ-álgebras en X no necesariamente es de nuevo una σ-álgebra en X. (Buscar un contra-ejemplo!)

Dada una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X, consideramos la familia de todas las σ-álgebras de X que contienen a $\mathcal{C}$:

$$\Phi = \{\mathcal{F} : \ \mathcal{F} \text{ es } \sigma\text{-álgebra de } X, \ \text{y } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}\}.$$

Claramente la familia Φ es no vacía, ya que al menos $\mathcal{P}(X)$, el conjunto potencia de X, es una σ-álgebra de X que contiene a $\mathcal{C}$.

Definimos $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \Phi = \bigcap\limits_{\mathcal{F} \in \Phi} \mathcal{F}$. Observe que $\sigma(\mathcal{C})$ es una σ-álgebra (proposición anterior), y además $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$.

Definición

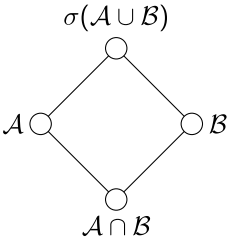
*A $\sigma(\mathcal{C})$ se le llama la **σ-álgebra generada** por $\mathcal{C}$. Esta es la menor σ-álgebra de X que contiene a $\mathcal{C}$.*

Estructura de las sigma-álgebras

De lo anterior tenemos

Proposición

Sea X un conjunto no-vacío. Las σ-álgebras de X forman un conjunto ordenado con la inclusión.
Además, esta estructura es un retículo: Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ son σ-álgebras de X, entonces su ínfimo es $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, y su supremo es $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$. $\square$



Estructura de las sigma-álgebras

Definición

*Sea X un espacio topológico. La menor σ-álgebra de X que contiene a todos los abiertos de X se llama la **σ-álgebra de Borel** de X, denotada por $\mathcal{B}(X)$.*

Nos interesa el caso particular en que $X = \mathbb{R}^n$, y su álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
A los elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ les llamamos los **borelianos** de $\mathbb{R}^n$.

Teorema

Todo boreliano de $\mathbb{R}^n$ es Lebesgue-mesurable.

Prueba: Sea $\mathcal{M}$ la colección de todos los conjuntos Lebesgue-mesurables en $\mathbb{R}^n$. Sabemos que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y que $\mathcal{M}$ contiene a todos los abiertos de $\mathbb{R}^n$. En particular, $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en la familia Φ de σ-álgebras que define a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Así

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigcap \Phi \subseteq \mathcal{M}. \quad \square$$