Propiedades de la Medida Exterior

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 07) 01.febrero.2023

Propiedades de la Medida Exterior

Las siguientes propiedades relacionan la medida exterior de Lebesgue con la existencia de ciertos conjuntos especiales.

Recordemos que una **topología** para un espacio X es una colección de conjuntos $\tau = \{A \subseteq X\}$, que satisface

1) $\varnothing, X \in \tau$,
2) $\{A_\ell\}_\ell \in \tau \implies \bigcup_\ell A_\ell \in \tau$,
3) $\{A_i\}_{i=1}^n \in \tau \implies \bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.

Por otro lado, una σ**-álgebra** en X, es una colección de conjuntos $\mathcal{A} = \{A \subseteq X\}$ que satisface

1) $\varnothing, X \in \mathcal{A}$,
2) $\{A_\ell\}_{\ell=1}^\infty \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{\ell=1}^\infty A_\ell \in \mathcal{A}$,
3) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$ (2 y 3 $\implies \bigcap_{\ell=1}^\infty A_\ell \in \mathcal{A}$).

Definición

*Sea X un espacio topológico. Un conjunto $G \subseteq X$ es G_δ (o **de tipo** G_δ) si es de la forma*

$$G = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \text{donde los } A_i \text{ son abiertos.}$$

Nota: G_δ viene de *Gebiet* (abierto en alemán) y *Durchschnitt* (intersección).

Definición

*Sea X un espacio topológico. Un conjunto $F \subseteq X$ es F_σ (o **de tipo** F_σ) si es de la forma*

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i, \quad \text{donde los } C_i \text{ son cerrados.}$$

Nota: F_σ viene de *Fermé* (cerrado en francés) y *Somme* (suma o unión).

La Jerarquía de Borel

Podemos definir también generalizaciones de estos tipos de conjuntos. Por ejemplo,

- un conjunto $G_{\delta\sigma}$ es de la forma $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=1}^{\infty} G_{ij}$.
- un conjunto $F_{\sigma\delta}$ es de la forma $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty} F_{ij}$.
- un conjunto $G_{\delta\sigma\delta}$ es de la forma $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty} G_{ijk}$.
- un conjunto $F_{\sigma\delta\sigma}$ es de la forma $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty} F_{ijk}$.
- ...

Esto se puede formalizar de una forma más sistemática.

La Jerarquía de Borel

Definición

*Sea X un espacio topológico. La **jerarquía de Borel** de X consiste de clases de conjuntos Σ_n^0, Π_n^0 y Δ_n^0, dadas por:*

- *Un conjunto $A \subseteq X$ está en Σ_1^0 si, y sólo si, es abierto.*
- *Un conjunto $A \subseteq X$ está en Π_n^0 si, y sólo si, su complemento está en Σ_n^0.*
- *Un conjunto $A \subseteq X$ está en Σ_n^0, $n > 1$, si y sólo si, es de la forma $A = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, con cada $A_i \in \Pi_{n_i}^0$, $n_i < n$.*
- *Un conjunto $A \subseteq X$ está en Δ_n^0, si, y sólo si, está en Σ_n^0 y en Π_n^0.*

Definición

*La colección de subconjuntos de X dada por $\mathcal{B}(X) = \displaystyle\bigcup_{n\geq 1} \Sigma_n^0 \cup \bigcup_{n\geq 1} \Pi_n^0 \cup \bigcup_{n\geq 1} \Delta_n^0$, se llama el **álgebra de Borel** de X.*

Proposición

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un conjunto abierto G de $\mathbb{R}^n$ tal que $E \subseteq G$ y

$$|G|_e \leq |E|_e + \varepsilon.$$

Prueba: Tomemos $\{I_k\}_{k\geq 1}$ una cobertura enumerable de E por intervalos cerrados en $\mathbb{R}^n$, de modo que

$$E \subseteq \bigcup_k I_k \qquad \text{y} \qquad \sum_k v(I_k) < |E|_e + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Consideramos ahora intervalos cerrados $\{I_k^*\}_{k\geq 1}$, tales que

$$I_k \subseteq \text{int}(I_k^*) \qquad \text{y} \qquad v(I_k^*) < v(I_k) + \tfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \qquad \forall\, k \geq 1.$$

Definamos $G = \bigcup_{k\geq 1} \text{int}(I_k^*)$. Observe que G es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y que

$$E \subseteq \bigcup_{k\geq 1} I_k \subseteq \bigcup_{k\geq 1} \text{int}(I_k^*) = G.$$

Propiedades de la Medida Exterior

Además, como $G \subseteq \bigcup I_k^*$, vale

$$\begin{aligned} |G|_e \;&\leq\; \sum_{k\geq 1} v(I_k^*) < \sum_{k\geq 1}\Big(v(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\Big) < \sum_{k\geq 1} v(I_k) + \varepsilon \sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k\geq 1} v(I_k) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \; |E|_e + \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = |E|_e + \varepsilon. \;\square \end{aligned}$$

Obs!
De la propiedad anterior, dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ podemos hallar un abierto $G \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $E \subseteq G$ y

$$|G|_e \leq |E|_e + \varepsilon.$$

En consecuencia, la medida exterior de E puede recuperarse como

$$|E|_e = \inf |G|_e, \quad \text{donde el ínfimo se toma sobre todos los abiertos } G \supseteq E.$$

Proposición

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Existe un conjunto $H \subseteq \mathbb{R}^n$ de tipo G_δ tal que $E \subseteq H$ y

$$|H|_e = |E|_e.$$

Prueba: De la proposición anterior, para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, existe un abierto $G_k \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que

$$E \subseteq G_k \qquad \text{y} \qquad |G_k|_e < |E|_e + \tfrac{1}{k}, \qquad \forall\, k = 1, 2, 3, \ldots$$

Consideramos la intersección $H = \bigcap\limits_{k \geq 1} G_k$, un conjunto de tipo G_δ, que satisface $E \subseteq H$.

Luego,

$$|E|_e \;\leq\; |H|_e \;\leq\; |G_k|_e \;<\; |E|_e + \tfrac{1}{k}, \qquad \forall\, k = 1, 2, 3, \ldots$$

Haciendo $k \to \infty$, obtenemos $|E|_e \;\leq\; |H|_e \;\leq\; |E|_e$, de modo que $|E|_e = |H|_e$. $\square$

Propiedades de la Medida Exterior

Al definir la noción de medida exterior, hemos usado intervalos I con bordes paralelos a los ejes coordenados de $\mathbb{R}^n$. Surge la pregunta de si la medida exterior de un conjunto depende de la posición de los ejes de coordenadas (ortogonales).

Respuesta: No. Para probar esto, consideraremos simultáneamente el sistema de coordenadas habitual en $\mathbb{R}^n$ y una rotación fija de este sistema. Las nociones pertenecientes al sistema rotado se denotarán con una prima $'$. Así, por ejemplo, I' denotará a un intervalo con bordes paralelos a los ejes de coordenadas rotados, y $|E|'_e$ denotará la medida exterior de un subconjunto E relativa a estos intervalos rotados:

$$|E|'_e = \inf_{S} \sum v(I'_k).$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las coberturas S' de E por intervalos rotados I'_k.

El volumen $v(I)$ de un intervalo claramente no cambia por la rotación. (Ver pág. 8 en Sección 1.3 de Wheeden y Zygmund).

Teorema

$|E|_e = |E|'_e$, *para todo* $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Prueba: Primero afirmamos que dado I intervalo cerrado y $\varepsilon > 0$, existe una cobertura $\{I'_\ell\}_\ell$ de I por intervalos cerrados rotados, tal que

$$I \subseteq \bigcup_\ell I'_\ell \qquad \text{y} \qquad \sum_\ell v(I'_\ell) < v(I) + \varepsilon.$$

(De forma similar, dado I' intervalo cerrado (no rotado) y $\varepsilon > 0$, existe una cobertura $\{I_\ell\}_\ell$ de I' por intervalos cerrados, tal que

$$I' \subseteq \bigcup_\ell I_\ell \qquad \text{y} \qquad \sum_\ell v(I_\ell) < v(I') + \varepsilon.)$$

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto arbitrario. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos una cobertura $\{I_k\}_{k \geq 1}$ de E tal que

$$E \subseteq \bigcup_k I_k \qquad \text{y} \qquad \sum_k v(I_k) < |E|_e + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Propiedades de la Medida Exterior

Para cada $k \geq 1$, elijamos $\{I'_{k\ell}\}_\ell$ una cobertura de I_k por intervalos rotados, tal que

$$I_k \subseteq \bigcup_\ell I'_{k\ell} \qquad \text{y} \qquad \sum_\ell v(I'_{k\ell}) < v(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |E|'_e &\leq \sum_{k\geq 1}\sum_{\ell\geq 1} v(I'_{k\ell}) < \sum_{k\geq 1}\Big(v(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\Big) < \sum_{k\geq 1} v(I_k) + \varepsilon\sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k\geq 1} v(I_k) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< |E|_e + \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = |E|_e + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como esto vale para todo $\varepsilon > 0$, portanto $|E|'_e \leq |E|_e$.

Un argumento similar, invirtiendo los papeles de los I e I', produce $|E|'_e \geq |E|_e$. $\square$

Definición

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que E es un conjunto ***Lebesgue-mesurable*** *(****mesurable****, o* ***medible****) si dado $\varepsilon > 0$, existe un abierto $G \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $E \subseteq G$ y*

$$|G - E|_e < \varepsilon.$$

Cuando E es mesurable, definimos su ***medida de Lebesgue*** *como*

$$|E| = |E|_e.$$

Obs: La condición de que E sea mesurable no debe confundirse con la conclusión del teorema anterior, el cual establece que existe un abierto G que contiene a E, tal que

$$|G|_e \leq |E|_e + \varepsilon.$$

En general, dado que tenemos la unión disjunta $G = E \cup (G - E)$ cuando $E \subseteq G$, sólo tenemos que $|G|_e \leq |E|_e + |G - E|_e$, y no podemos concluir de $|G|_e < |E|_e + \varepsilon$, que $|G - E|_e < \varepsilon$.

Ejemplo 1: Todo abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es Lebesgue-mesurable.

Tomemos $G = U$, un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $U \subseteq G$. Entonces

$$|G - U|_e = |U - U|_e = |\varnothing|_e = 0 < \varepsilon, \ \forall \, \varepsilon > 0. \qquad \text{(¿por qué vacío mide 0?)}$$

Esto muestra que U es mesurable. $\square$

Ejemplo 2: Todo conjunto de $\mathbb{R}^n$ con medida exterior nula, es Lebesgue-mesurable.

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con $|E|_e = 0$. De la Proposición 1, para todo $\varepsilon > 0$, existe un abierto $G \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $E \subseteq G$ y

$$|G|_e < |E|_e + \varepsilon = \varepsilon.$$

Luego, como $G - E \subseteq G$, entonces $|G - E|_e \leq |G|_e < \varepsilon$, lo que muestra que E es Lebesgue-mesurable. $\square$

Ejemplo 3: Toda unión enumerable $E = \bigcup_{k\geq 1} E_k$ de conjuntos Lebesgue-mesurables $E_k \subseteq \mathbb{R}^n$, es Lebesgue-mesurable. Además

$$|E| = \Big|\bigcup_k E_k\Big| \leq \sum_k |E_k|.$$

Tomemos $E = \bigcup_{k\geq 1} E_k$, donde los $E_k \subseteq \mathbb{R}^n$ son todos mesurables. Para cada $k \geq 1$, de la Propiedad 1, existe un abierto G_k, tal que $E_k \subseteq G_k$ y $|G_k - E_k|_e < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Sea $G = \bigcup_k G_k$. G es un abierto de $\mathbb{R}^n$, y $E = \bigcup_k E_k \subseteq \bigcup_k G_k = G$. Además, como $G - E \subseteq \bigcup_k (G_k - E_k)$, tenemos

$$|G - E|_e \leq \Big|\bigcup_{k\geq 1}(G_k - E_k)\Big|_e \leq \sum_{k\geq 1} \big|G_k - E_k\big|_e \leq \sum_{k\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Esto muestra que E es Lebesgue-mesurable.
Luego,

$$|E| = |E|_e \leq \Big|\bigcup_{k\geq 1} E_k\Big|_e \leq \sum_{k\geq 1} \big|E_k\big|_e = \sum_{k\geq 1} \big|E_k\big|. \square$$

Ejemplo 4: Todo intervalo n-dimensional I es Lebesgue-mesurable, y vale $|I| = v(I)$.

Prueba:

I es la unión de su interior y su frontera, esto es, $I = I^\circ \cup \partial I$.

De los ejemplos anteriores:

- Ya vimos que I° es mesurable, ya que es un abierto de $\mathbb{R}^n$ (Ejemplo 1).
- Por otro lado, I° es un conjunto de medida nula (ya que al ser el borde de un objeto n-dimensional, ∂I es $(n-1)$-dimensisonal, y no tiene volumen en $\mathbb{R}^n$. (Ejemplo 2). Portanto, ∂I es mesurable.

De ahí que $I = I^\circ \cup \partial I$ es unión de dos mesurables, portanto es Lebesgue-mesurable (Ejemplo 3). $\square$

Corolario

Si $\{I_k\}_{k=1}^N$ es una colección finita de intervalos n-dimensionales que no se traslapan, entonces $\bigcup_{k=1}^N I_k$ es Lebesgue-mesurable y $\left|\bigcup_{k=1}^N I_k\right| = \sum_{k=1}^N |I_k|$.

Recordemos que la distancia entre dos conjuntos $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ está dada por

$$d(E_1, E_2) = \inf\{||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|| : \ \mathbf{x}_1 \in E_1, \ \mathbf{x}_2 \in E_2\}.$$

Lema

Si $d(E_1, E_2) > 0$, entonces $|E_1 \cup E_2|_e = |E_1|_e + |E_2|_e$.

Ejemplo 5: Todo cerrado $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es Lebesgue-mesurable.

Ejemplo 6: El complemento E^c de cualquier conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mesurable, es Lebesgue-mesurable.

Ejemplo 7: Toda intersección enumerable $E = \bigcap_{k \geq 1} E_k$ de conjuntos Lebesgue-mesurables $E_k \subseteq \mathbb{R}^n$, es Lebesgue-mesurable.

Ejemplo 8: Si $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ son Lebesgue-mesurables, entonces $E_1 - E_2$ es Lebesgue-mesurable.

Proposición

La colección de conjuntos Lebesgue-mesurables de $\mathbb{R}^n$ es una σ-álgebra.

(Ver las pruebas de todas estas propiedades en el capítulo 3 de Wheeden y Zygmund.)