La Medida Exterior de Lebesgue

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 06) 30.enero.2023

La Medida Exterior

Consideramos I un intervalo n-dimensional

$$I = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \; a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

Definición

El ***volumen*** *de I se define como $v(I) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.*

Tomemos ahora un subconjunto cualquiera $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Cubrimos E por una cobertura enumerable de intervalos $S = \{I_k\}_{k\geq 1}$, de modo que $E \subseteq \bigcup S = \bigcup_{k\geq 1} I_k$.

Definimos $\sigma(S) = \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k)$ el volumen asociado a la cobertura $\{I_k\}$.

Definición

La ***medida exterior de Lebesgue*** *de $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se define como*

$$|E|_e = \inf\{\sigma(S) : \; S \textit{ es cobertura enumerable de } E \textit{ por intervalos}\}.$$

Obs: Como los volúmenes de las coberturas son no negativas, $\sigma(S) \geq 0$, al tomar el ínfimo tenemos

$$0 \leq |E|_e \leq \infty.$$

De hecho, si E es limitado (como subconjunto de $\mathbb{R}^n$), entonces $|E|_e < \infty$. Si E no es limitado, entonces $|E|_e = \infty$.

Proposición

Para un intervalo n-dimensional $I \subseteq \mathbb{R}^n$, vale $|I|_e = v(I)$.

Prueba: Mostramos $|I|_e = v(I)$, comprobando que $|I|_e \leq v(I)$ e $|I|_e \geq v(I)$.

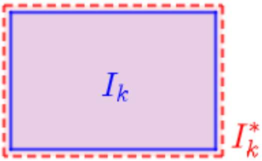
Observe que $C = \{I\}$ es una cobertura por intervalos de I, y que en este caso, como consiste de un solo elemento, tenemos que $\sigma(C) = v(I)$. Luego

$$|I|_e = \inf_S \sigma(S) \leq \sigma(C) = v(I).$$

La Medida Exterior

Para mostrar la otra desigualdad, tome $S = \{I_k\}_k$ una cobertura enumerable de I por intervalos. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $k \geq 1$, consideremos un intervalo cerrado $I_k^* \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que

$$I_k \subseteq \text{int}(I_k^*) \qquad \text{y} \qquad v(I_k^*) < v(I_k) + \varepsilon.$$



En particular,

$$I \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{int}(I_k^*) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^*,$$

y los $\{I_k^*\}_k$ forman otra cobertura enumerable de I.

Entonces, $I \subseteq \bigcup I_k^*$. Como I es compacto, del Teorema de Heine-Borel, existe una subcobertura finita $\{I_{k_j}^*\}_{j=1}^N$ tal que $I \subseteq \bigcup_j I_{k_j}^*$.
Luego,

$$\begin{aligned} v(I) &\leq v\Big(\bigcup I_{k_j}^*\Big) \leq \sum_{j=1}^N v\big(I_{k_j}^*\big) < \sum_{j=1}^N \Big(v\big(I_{k_j}\big) + \varepsilon\Big) \\ &< \sum_{j=1}^N v\big(I_{k_j}\big) + N\varepsilon \leq \sum_{k\geq 1} v\big(I_k\big) + N\varepsilon = \sigma(\{I_k\}) + N\varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando ε suficientemente pequeño (esto es $\varepsilon \to 0$), tenemos

$$v(I) \leq \sigma(S),$$

para cualquier subcobertura S de I por intervalos. Portanto, $v(I) \leq |I|_e$. $\square$

Proposición

Si $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$*, entonces* $|E_1|_e \leq |E_2|_e$.

Prueba: Observe que si S es cobertura de E_2, entonces también es cobertrura de E_1, pues

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \bigcup S.$$

De ahí que

$$\{S: \ S \text{ es cobertura por intervalos de } E_1\} \supseteq \{S: \ S \text{ es cobertura por intervalos de } E_2\}.$$

Tomando el ínfimo sobre las coberturas S, obtenemos

$$|E_1|_e = \inf_S \{\sigma(S): \ S \text{ cubre a } E_1\} \leq \inf_S \{\sigma(S): S \text{ cubre a } E_2\} = |E_2|_e. \ \square$$

Proposición

Suponga que $E = \bigcup_{k\geq 1} E_k$ *es una unión enumerable se subconjuntos* $E_K \subseteq \mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$|E|_e \leq \sum_{k\geq 1} |E_k|_e.$$

Prueba:

- En el caso en que algún $|E_k|_e = \infty$, el enunciado se sigue del hecho que E_k es no limitado, y portanto E, también lo es. Así que $|E|_e = \infty = \sum |E_k|_e$.
- Asumamos entonces que $|E_k|_e < \infty$, para todo $k \geq 1$. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $k \geq 1$, elegimos una cobertura por intervalos cerrados $\{I_j^{(k)}\}_{j\geq 1}$ de E_k, tal que

$$E_k \subseteq \bigcup_j I_j^{(k)}, \qquad \text{y} \qquad \sum_{j\geq 1} v\big(I_j^{(k)}\big) < |E_k|_e + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Entonces, como

$$E \subseteq \bigcup_k E_k \subseteq \bigcup_k \bigcup_j I_j^{(k)},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} |E|_e &\leq \sum_k v(E_k) \leq \sum_k \sum_j v(I_j^{(k)}) < \sum_k \Big(|E_k|_e + \frac{\varepsilon}{2^k}\Big) \\ &< \sum_k |E_k|_e + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \sum_k |E_k|_e + \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando de nuevo el ínfimo sobre todos los $\varepsilon > 0$, resulta

$$|E|_e \leq \sum_k |E_k|_e. \ \square$$

Definición

*Decimos que un subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es de **medida cero** o de **medida nula**, si $|E|_e = 0$.*

Obs: De las proposiciones 2 y 3 anteriores, tenemos

- subconjuntos de medida cero, son de medida cero.
- toda unión enumerable de conjuntos de medida cero, es de medida cero.

Ejemplo: El conjunto de Cantor.

$$\begin{aligned} C_0 &= [0,1] \\ C_1 &= [0,\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},1] \\ C_2 &= [0,\tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9},\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},\tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9},1] \\ C_3 &= \ldots \end{aligned}$$

Continuando este proceso, donde

$$C_{k+1} = \tfrac{1}{3}C_k \cup \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}C_k\right),$$

obtenemos en general que C_k es una unión de 2^k intervalos cerrados disjuntos, cada uno de longitud $\frac{1}{3^k}$, todos formando una secuencia descendente:

$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$$

Así, $v(C_k) = \sigma(C_k) = 2^k \cdot \frac{1}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Definición

*El **Conjunto de Cantor** se define como* $\mathbf{C} = \lim_k C_k = \bigcap_k C_k$.

Propiedades:

- $\mathbf{C}$ es no vacío. (Teorema de Intersección de Cantor).
- $\mathbf{C}$ es compacto.

Conjuntos de Medida Cero

Propiedades:

- **C** consiste de aquellos reales en $[0, 1]$ cuya representación en base 3 consiste sólo de 0's y 2's.
- **C** es de medida nula.

Proposición

El conjunto de Cantor tiene medida exterior de Lebesgue 0.

Prueba: Observe que cada uno de los conjuntos C_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ forma una cobertura por intervalos cerrados para **C**.

De la definición de medida exterior, tenemos

$$|\mathbf{C}|_e \leq v(C_k) = \left(\tfrac{2}{3}\right)^k, \text{ para todo } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Como $\left(\frac{2}{3}\right)^k \to 0$, entonces $0 \leq |\mathbf{C}|_e \leq 0$, de modo que $|\mathbf{C}|_e = 0$. $\square$

Conjuntos de Medida Cero

Propiedad interesante: El Conjunto de Cantor, al ser el límite de los C_k, satisface la identidad autoreferente:

$$\mathbf{C} = \tfrac{1}{3}\mathbf{C} \,\cup\, \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\mathbf{C}\right).$$

Este tipo de identidades son comunes en aquellos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que llamamos *fractales*.

Conjuntos de Medida Cero

Propiedades:

- **C** es no enumerable, y tiene la misma cardinalidad de $\mathbb{R}$.

Proposición

El conjunto de Cantor está en correspondencia biunívoca con el intervalo $[0, 1]$.

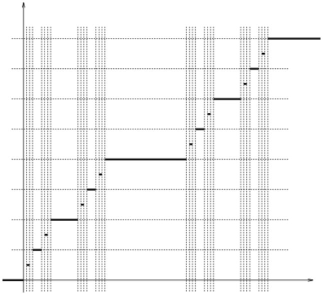
Esquema de Prueba: Considere los complementos

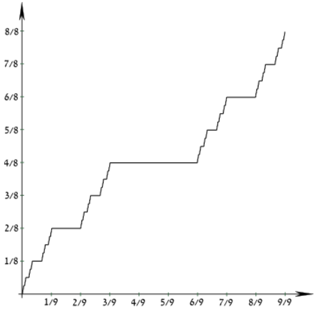
$$D_0 = [0, 1], \qquad D_k = [0, 1] - C_k = \text{unión de } k - 1 \text{ abiertos } I_j^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Para cada $k = 1, 2, 3, \ldots,$ definimos funciones $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

- $f_k(0) = 0$, $f_k(1) = 1$, f_k es monótona no-decreciente,
- f_k es lineal por partes en cada componente conexa de C_k y de D_k,
- $f_k(x) = j \cdot 2^{-k}$, para $x \in I_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{k-1}$

Conjuntos de Medida Cero





Las f_k son continuas en $[0, 1]$, portanto uniformemente continuas. Además, $f_k \to f$ convergen a una función continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, llamada la **función de Cantor-Lebesgue**.

Esta función sirve para establecer una biyección entre **C** y $[0, 1]$.