Propiedades de Integrabilidad

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 05) 25.enero.2023

Teorema (Criterio de Riemann de Integrabilidad)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas, g monótona no-decreciente. Entonces f es Riemann-Stieltjes integrable respecto de g en $[a, b]$ $\iff$ para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de $[a, b]$ tal que si $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ es refinamiento de P_ε, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) < \varepsilon,$$

donde $m_i = \inf\limits_{[t_{i-1}, t_i]} f$ y $M_i = \sup\limits_{[t_{i-1}, t_i]} f$.

Prueba: $(\Rightarrow)$ Pendiente.

Corolario

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitadas. Entonces:*

i) *Si* f *es continua y* g *es monótona* $\Rightarrow f$ *es* g*-integrable.*

ii) *Si* f *es continua y* $g \in BV[a, b] \Rightarrow f$ *es* g*-integrable.*

iii) *Si* f *es monótona y* g *es continua* $\Rightarrow f$ *es* g*-integrable.*

iv) *Si* $f \in BV[a, b]$ *y* g *es continua* $\Rightarrow f$ *es* g*-integrable.*

Prueba: Ejercicio!

Teorema

Sean $f, f_1, f_2, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas, g monótona no-decreciente en $[a, b]$.

i) *f es g-integrable $\Rightarrow |f|$ es g-integrable.*

ii) *Si f_1, f_2 son g-integrables $\Rightarrow f_1 f_2$ es g-integrable.*

Prueba: (i) Tome $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$, que cumple el criterio de integrabilidad de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) < \varepsilon,$$

con $m_i = \inf\limits_{[t_{i-1}, t_i]} f$ y $M_i = \sup\limits_{[t_{i-1}, t_i]} f$. Observe que

$$M_i - m_i = \sup\{f(x) - f(y) : \; x, y \in [t_{i-1}, t_i]\} < \varepsilon.$$

(i) De la desigualdad triangular $\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leq |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$, cuando tomamos $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$.

Luego, la misma partición P sirve para mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n}(\sup|f|_i - \inf|f|_i)\big(g(t_i) - g(t_{i-1})\big) \leq \sum_{i=1}^{n}(\sup f_i - \inf f_i)\big(g(t_i) - g(t_{i-1})\big) < \varepsilon,$$

de modo que $|f|$ también es g-integrable.

(ii) Si $|f| \leq K$, entonces

$$\left|\big(f(x)\big)^2 - \big(f(y)\big)^2\right| = \left|\big(f(x)+f(y)\big)\big(f(x)-f(y)\big)\right| \leq 2||f|| \cdot | \cdot |f(x) - f(y)|$$

Esto muestra que f^2 es g-integrable, nuevamente por el criterio de Riemann.
Como $2f_1f_2 = (f_1+f_2)^2 - f_1^2 - f_2^2$, entonces f_1f_2 es suma de funciones g-integrables.
Portanto, es g-integrable. $\square$

Teorema

Si g es monótona no-decreciente en $[a,b]$ y f es g-integrable en $[a,b]$, entonces

$$\Big| \int_a^b f\,dg \Big| \leq \int_a^b |f|\,dg \leq ||f||\,(g(b) - g(a)).$$

Prueba: Sabemos que $|f|$ es g-integrable. Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a,b]$, con representantes ξ_i, entonces

$$-||f|| \leq -|f(\xi_i)| \leq f(\xi_i) \leq |f(\xi_i)| \leq ||f||, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Multiplicando por $\Delta g_i = g(t_i) - g(t_{i-1})$, y sumando

$$-\sum_{i=1}^n ||f||\,\Delta g_i \leq -\sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\,\Delta g_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta g_i \leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\,\Delta g_i \leq \sum_{i=1}^n ||f||\,\Delta g_i.$$

Luego

$$-||f||\,(g(b)-g(a)) \leq -s(P,|f|,g) \leq s(P,f,g) \leq s(P,|f|,g) \leq ||f||\,(g(b)-g(a)).$$

Así, $|s(P,f,g)| \leq s(P,|f|,g) \leq ||f||\,(g(b)-g(a))$.

Tomando el límite cuando $||P|| \to 0$, obtenemos

$$\Big|\int_a^b f\,dg\Big| \leq \int_a^b |f|\,dg \leq ||f||\,(g(b)-g(a)). \;\square$$

Corolario

Si $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$m\,(g(b)-g(a)) \leq \int_a^b f\,dg \leq M\,(g(b)-g(a)). \;\square$$

Teorema (1er. Teorema del Valor Medio)

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones, f continua, g monótona no-decreciente. Entonces, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f\,dg = f(c) \int_a^b dg = f(c)\,\big(g(b) - g(a)\big).$$

Prueba: Sean $m = \inf\limits_{[a,b]} f$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f$. Del corolario anterior, tenemos

$$m\,\big(g(b) - g(a)\big) \leq \int_a^b f\,dg \leq M\,\big(g(b) - g(a)\big).$$

- $g(b) = g(a)$: g sería constante, y
$$\int f\,dg = 0 = f(c) \cdot 0 = f(c)\,\big(g(b) - g(a)\big),$$
para cualquier $c \in [a,b]$.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Otros Resultados

- $g(b) > g(a)$: la desigualdad de arriba implica que

$$\inf f = m \leq k = \frac{\int_a^b f\, dg}{g(b) - g(a)} \leq M = \sup f,$$

Como f es continua, por el Teorema del Valor Medio de Bolzano, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$. Así

$$\int_a^b f\, dg = k\,\big(g(b) - g(a)\big) = f(c)\,\big(g(b) - g(a)\big). \quad \square$$

Teorema (de Diferenciación (análogo a la 1a. parte del T. Fundamental))

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones, f continua, g monótona no-decreciente, y suponga que g es diferenciable en $c \in (a,b)$. Entonces, la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(t) = \int_a^t f\, dg$$

es diferenciable en c y $F'(c) = f(c)g'(c)$.

Prueba: Tome $h > 0$ tal que $c + h \in [a,b]$. Entonces, del 1er. Teorema del Valor Medio, obtenemos

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f\, dg - \int_a^{c} f\, dg = \int_c^{c+h} f\, dg = f(\xi)\,\big(g(c+h) - g(c)\big),$$

para algún $\xi \in [c, c+h]$.

Otros Resultados

Dividiendo por h, y tomando el límite cuando $h \to 0^+$

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi)\cdot \frac{g(c+h)-g(c)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(c+h)-g(c)}{h} = f(c)g'(c).$$

Portanto, F es diferenciable en c. $\square$

Otros Resultados

Teorema (2do. Teorema del Valor Medio)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones, f monótona no-decreciente, g continua. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f\,dg = f(a) \int_a^c dg + f(b) \int_c^b dg.$$

Prueba: g es f-integrable. Por el 1er. Teorema del Valor Medio, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b g\,df = g(c)\,\big(f(b) - f(a)\big).$$

De la integración por partes, entonces f es g-integrable y

$$\begin{aligned}\int_a^b f\,dg &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g\,df = f(b)g(b) - f(a)g(a) - g(c)\,\big(f(b) - f(a)\big) \\ &= f(a)\,\big(g(c) - g(a)\big) + f(b)\,\big(g(b) - g(c)\big) = f(a) \int_a^c dg + f(b) \int_c^b dg. \square\end{aligned}$$

Teorema (Cambio de Variable)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones, f continua y g-integrable. Suponga que $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ es un difeomorfismo, con $\varphi(\alpha) = a$ y $\varphi(\beta) = b$. Entonces

$$\int_a^b f\, dg = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(s)\, d(g \circ \varphi)(s) = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\, d(g \circ \varphi).$$

Relacionar con el cambio de variable tradicional, $d(g \circ \varphi) = dg(\varphi) \cdot \varphi'$.

Prueba: Ejercicio! $\square$.

Propiedades de Convergencia

Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función monótona no-decreciente, y consideremos una secuencia de funciones $\{f_n\}_{n\geq 1}$, con $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, y tal que converge a otra función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, esto es $f_n \to f$.

Es de esperar que, $\displaystyle\int_a^b f_n\, dg \to \int_a^b f\, dg$.

Ejemplo: Sea $g(x) = x$, y considere la secuencia de funciones $f_n : [0,4] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ -n^2(x - \frac{2}{n}), & \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n}; \\ 0, & \frac{2}{n} < x \leq 4. \end{cases}$$

¿Qué ocurre con las integrales $\int f_n\, dg$?

Propiedades de Convergencia

Teorema (Integrabilidad bajo convergencia uniforme)

Sean $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones g-integrables, g monótona no-decreciente, tales que $f_n \xrightarrow{unif} f$. Entonces, f es g-integrable en $[a, b]$ y $\int f\, dg = \lim_n \int f_n\, dg$. $\square$

Teorema (Teorema de Convergencia Limitada)

Sean $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones g-integrables, g monótona no-decreciente. Suponga que existe $B > 0$ tal que $||f_n|| \leq B, \forall n$. Si la función $f = \lim_n f_n$ existe y es g-integrable en $[a, b]$, entonces $\int f\, dg = \lim_n \int f_n\, dg$.

Teorema (Teorema de Convergencia Monótona)

Sean $\{f_n\}$ una secuencia monótona de funciones $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ g-integrables, g monótona no-decreciente. Si la función $f = \lim_n f_n$ existe y es g-integrable en $[a, b]$, entonces $\int f\, dg = \lim_n \int f_n\, dg$.