Funciones de Variación Limitada

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 04) 23.enero.2023

Teorema (Modificación de la Integral)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas. Si la derivada g' existe y es continua en (a, b), y f es g-integrable en $[a, b]$, entonces el producto fg es Riemann-integrable en $[a, b]$, y

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt.$$

Prueba: Como g' es continua en $[a, b]$, entonces g' es uniformemente continua. Sea $\varepsilon > 0$, y tomemos un partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$, tal que si

$$\xi_i, \zeta_i \in [t_i, t_{i-1}] \qquad \Longrightarrow \qquad \big|g'(\xi_i) - g'(\zeta_i)\big| < \tfrac{\varepsilon}{||f||(b-a)},$$

donde $||f|| = \sup f$ en $[a, b]$.

Consideramos la diferencia entre las sumas $s(P, f, g)$ y $s(P, fg')$, usando los puntos ξ_i como representantes de P:

Propiedades

$$\left|s(P,f,g) - s(P,fg')\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\xi_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)\right|.$$

Por el teorema del valor medio, existe $\zeta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que $g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\zeta_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\left|s(P,f,g) - s(P,fg')\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\zeta_i)\left(t_i - t_{i-1}\right) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\xi_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\left|g'(\zeta_i) - g'(\xi_i)\right|\left(t_i - t_{i-1}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} ||f|| \cdot \tfrac{\varepsilon}{||f||(b-a)}\left(t_i - t_{i-1}\right) \;=\; \varepsilon.
\end{aligned}$$

Propiedades

Del argumento anterior, para $\varepsilon > 0$, existe una partición P' de $[a,b]$ tal que cualquier refinamiento P cumple

$$|s(P,f,g) - s(P,fg')| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, como f es g-integrable, existe una partición P'' de $[a,b]$, tal que todos sus refinamientos P cumplen

$$\left|s(P,f,g) - \int_a^b f\,dg\right| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando un refinamiento cualquiera de $P' \cup P''$, obtenemos que

$$\left|s(P,fg') - \int_a^b f\,dg\right| \leq \left|s(P,fg') - s(P,f,g)\right| + \left|s(P,f,g) - \int_a^b f\,dg\right| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{||P||\to 0} s(P,fg')$ rxiste, fg' es Riemann-integrable y

$$\int_a^b f\,dg = \lim_{||P||\to 0} s(P,fg') = \int_a^b f(t)g'(t)\,dt. \square$$

Ejemplos

Ejemplo 1: Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin t \, d \sin t$.

Ejemplo 2: Calcular $\displaystyle\int_0^{N} x^2 \, d(x - \lfloor x \rfloor)$.

Definición

*Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función, y sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a,b]$. Definimos la **variación** de f respecto de P como*

$$v_f(P) = \sum_{i=1}^{n} \big|f(t_i) - f(t_{i-1})\big|.$$

Definición

*Sean f y P como arriba. Decimos que la función f es **de variación limitada** (**de variación acotada**), cuando el conjunto $\{v_f(P) : P \text{ es partición de } [a,b]\}$ es limitado.*
*En ese caso, definimos la **variación total** de f en $[a,b]$ por*

$$V_f\,[a,b] = \sup\{v_f(P) : P \text{ es partición de } [a,b]\}.$$

Denotamos por $\mathbf{BV}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ al conjunto de las funciones de variación limitada en $[a,b]$.

Teorema (Propiedades)

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, P, Q *particiones de* $[a,b]$. *Entonces:*

i) $P \subseteq Q \;\Rightarrow\; v_f(P) \leq v_f(Q)$.

ii) *Si* f *es monótona no-decreciente, entonces* $v_f(P) = f(b) - f(a)$. *Si* f *es monótona no-creciente, entonces* $v_f(P) = f(a) - f(b)$.
En cualquiera de los dos casos, f *es de variación limitada, y* $V_f[a,b] = |f(b) - f(a)|$.

iii) *Si* f *es constante, entonces* $v_f(P) = 0$. *En este caso,* f *es de variación limitada y* $V_f[a,b] = 0$.

iv) *Si* f *es Lispchitz, con constante* L, *entonces* f *es de variación limitada y* $V_f[a,b] \leq L(b-a)$.

v) *Si* f *es diferenciable y tal que* $|f'(t)| \leq L$ *en* $[a,b]$, *entonces* f *es de variación limitada y* $V_f[a,b] \leq L(b-a)$.

Variación Limitada

Ejemplo: Consideremos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Mostramos que f no es de variación limitada en $[0,1]$.

Proposición

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones en $\in BV[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces, valen las siguientes propiedades:

i) $|f(x)| \leq |f(a)| + V_f[a, b]$, *para todo* $x \in [a, b]$.

ii) $\alpha f \in BV[a, b]$ *y* $V_{\alpha f}[a, b] = |\alpha| V_f[a, b]$.

iii) $f + g \in BV[a, b]$ *y* $V_{f+g}[a, b] \leq V_f[a, b] + V_g[a, b]$.

iv) $fg \in BV[a, b]$ *y* $V_{fg}[a, b] \leq ||g|| V_f[a, b] + ||f|| V_g[a, b]$.

v) $BV[a, b]$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial.*

vi) *La función* $f \to V_f[a, b]$ *no es una norma para* $BV[a, b]$. *Sin embargo,* $f \to ||f||_{BV} = |f(a)| + V_f[a, b]$ *sí lo es.*

Prueba: Ejercicio! $\square$