Repaso de Integral de Riemann

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 01) 11.enero.2023

Integral de Darboux

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada, con $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a, b]$.
Recordemos que una partición (finita) P del intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito

$$P = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\},$$

con $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$. En este caso, la partición consiste de n intervalos $I_j = [t_{j-1}, t_j]$, para $j = 1, 2, \ldots, n$.
Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, definimos

$$m_i = \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f, \qquad \text{y} \qquad M_i = \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f.$$

La **suma inferior de Darboux** $s(P, f)$ y la **suma superior de Darboux** $S(P, f)$ de la función f, asociadas a la partición P, se definen por

$$s(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}), \qquad S(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

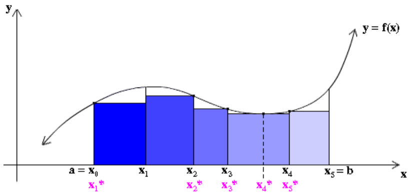
Teorema

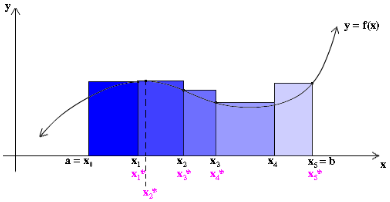
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Para toda partición P, $m(b-a) \leq s(P,f) \leq S(P,f) \leq M(b-a)$.

Prueba:

Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, $m_i \leq f(x) \leq M_i$, de modo que $m_i(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1})$.
Sumando sobre cada i, obtenemos

$$s(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = S(P,f). \square$$





Integral de Darboux

Sean P, Q particiones de $[a, b]$. Recordemos que Q es un **refinamiento** de P si $P \subseteq Q$ (Q tiene al menos los mismos puntos de P). En este caso, decimos que Q es **más fina** que P, o también decimos que P es **menos fina** (*coarse*) que Q.

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada, P, Q particiones de $[a, b]$, con $P \subseteq Q$. Entonces

$$s(P, f) \leq s(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(P, f).$$

Prueba: Consideramos el caso simple en que el refinamiento añade sólo un punto, digamos $Q = P \cup \{x\} = \{t_0, t_1, \ldots, t_{j-1}, x, t_j, \ldots, t_n\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$.
Esto es, $x_i = t_i$ para $i = 0, 1, \ldots, j-1$, $x_j = x$ y $x_i = t_{i-1}$ para $i = j+1, \ldots, n+1$.
Definamos $\widetilde{m}_i = \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f$ y $\widetilde{M}_i = \sum\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f$. Entonces

Integral de Darboux

$$
\begin{aligned}
s(Q,f) &= \sum_{i=1}^{n+1} \widetilde{m}_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + \underbrace{\widetilde{m}_j(x - t_{j-1}) + \widetilde{m}_{j+1}(t_j - x)}_{\geq m_j(t_j - t_{j-1})} + \sum_{i=j+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = s(P,f).
\end{aligned}
$$

Un argumento similar con supremo, en lugar de ínfimo, muestra que $S(Q,f) \leq S(P,f)$. Para el caso general, si $Q = P \cup \bigcup_{j=1}^{k} \{x_j\}$, basta aplicar el argumento anterior a cada uno de los puntos x_j. $\square$

Integral de Darboux

Una **cadena** de refinamientos de una partición P de $[a, b]$, es una secuencia de particiones

$$P \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq \ldots \subseteq P_k \subseteq \ldots$$

Del teorema y la propiedad anteriores, podemos deducir que si $\{P_k\}_{k\geq 1}$ es una cadena de refinamientos de P, entonces, para cualquier función limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vale

$$s(P,f) \leq s(P_1,f) \leq \ldots \leq s(P_k,f) \leq \ldots \leq S(P_k,f) \leq \ldots \leq S(P_1,f) \leq S(P,f).$$

En particular:

- La secuencia de sumas inferiores $s(f, P_k)$ es monótona no-decreciente, y está limitada superiormente por $M(b - a)$. Luego, converge (a su supremo).
- La secuencia de sumas superiores $S(f, P_k)$ es monótona no-creciente, y está limitada inferiormente por $m(b - a)$. Luego, converge (a su ínfimo).

Integral de Darboux

Definición

*Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ función limitada. Definimos la **integral inferior** de Darboux por*

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f(t)\,dt = \sup_P s(P,f) = \lim_{||P||\to 0} \sup s(P,f).$$

*De la misma forma, definimos la **integral superior** de Darboux de f como*

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f(t)\,dt = \inf_P S.(P,f) = \lim_{||P||\to 0} \inf s(P,f).$$

Integral de Darboux

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas. Valen las siguientes afirmaciones:

i) Para toda partición P de $[a, b]$, $s(P, f) \leq \underline{\int_a^b} f$ y $\overline{\int_a^b} f \leq S(P, f)$.

ii) Dado $\varepsilon > 0$, existen particiones $\underline{P}$ y $\overline{P}$ de $[a, b]$ tales que

$$\underline{\int_a^b} f - s(\underline{P}, f) < \varepsilon, \qquad \text{y} \qquad S(\overline{P}, f) - \overline{\int_a^b} < \varepsilon.$$

iii) $\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$ y $\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f$.

iv) $\underline{\int} f + \underline{\int} g \leq \underline{\int} (f + g) \leq \int (f + g) \leq \overline{\int} (f + g) \leq \overline{\int} f + \overline{\int} g$.

v) $f \leq g \implies \underline{\int} f \leq \underline{\int} g$ y $\overline{\int} f \leq \overline{\int} g$.

Integral de Darboux

Definición

Una función limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es ***Darboux-integrable*** *si* $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Teorema

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Las siguientes son equivalentes:

i) *f es Darboux-integrable.*

ii) *Para todo $\varepsilon > 0$, existen particiones P, Q de $[a,b]$ tales que $S(P,f) - s(Q,f) < \varepsilon$.*

iii) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P de $[a,b]$ tal que $S(P,f) - s(P,f) < \varepsilon$.*

iv) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ tal que*

$$\mathcal{O}_P(f) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon.$$

El número $\omega_i = M_i - m_i$ se llama la oscilación de f sobre el subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Integral de Riemann

Recordemos que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es limitada, una **suma de Riemann** de f sobre la partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ es una suma de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \quad \text{con } t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i.$$

Recordemos también que

Definición

*f es **Riemann-integrable** si el límite $\lim\limits_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$ existe, (para cualquier partición P y cualquier elección válida de los ξ_i).*

En ese caso, escribimos dicho límite como $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,dt.$

Integral de Riemann

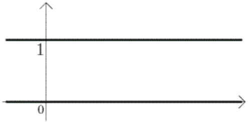
Nota: $||P|| = \sup(t_i - t_{i-1})$ es la **norma** de la partición P.

Teorema (Equivalencia entre Riemann y Darboux)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitada.* f *es Darboux-integrable* f *es Riemann-integrable.*

Prueba: Ejercicio!

Ejemplo: La función de Dirichlet



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

Para cualquier partición P de $[a, b]$, los subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ siempre contienen racionales e irracionales. Luego, $m_i = 0$ y $M_i = 1$, para todo i, de modo que $s(P, f) = 0$ e $S(P, f) = b - a = 1$, para toda partición P.

Portanto, $\underline{\int_0^1} f(t)\,dt = 0$ e $\overline{\int_0^1} f(t)\,dt = 1$, por lo que f no es Riemann integrable.