Teoría de la Medida e Integración 2022

Lista 03

19.marzo.2022

1. Sea $X = \mathbb{R}$. ¿Para cuáles σ-álgebras son las siguientes funciones de medida?

$$(i)\ \mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \varnothing; \\ 1, & A \neq \varnothing. \end{cases} \qquad (ii)\ \mu(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ es finito;} \\ 1, & A^c \text{ es finito.} \end{cases}$$

2. (a) Encuentre un ejemplo para mostrar que la condición de finitud en las Propiedad de continuidad superior ((vii) en las propiedades de medida) es esencial: $B_n \searrow B$, $\mu(B_1) < \infty \implies \mu(B) = \inf_n \mu(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n)$.

   (b) Hallar una medida μ en $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ es sea σ-finita, pero que asigne a cada intervalo $[a, b)$, con $b - a > 2$, una masa finita.

3. (a) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, y sea $F \in \mathcal{A}$. Muestre que la función $\mu_F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ dada por $\mu_F(A) = \mu(A \cap F)$ define una medida. μ_F es llamada la *medida μ relativa a F.*
   (b) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y sea $A_{n n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de conjuntos tales que $\mathbb{P}(A_n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\mathbb{P}\Big(\bigcap_n A_n\Big) = 1$.

4. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita, y sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ secuencias tales que $B_n \subseteq A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) - \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n - B_n).$$

5. Sea λ la medida de Lebesgue 1-dimensional.

   i) Probar que para todo $x \in \mathbb{R}$, x es un conjunto de Borel, con $\lambda x = 0$.
   ii) Mostrar, de dos formas distintas, que $\mathbb{Q}$ es un conjunto de Borel, y que $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$. Primero usando (i), y luego considerando los conjuntos $C(\varepsilon) = \bigcup_n [q_n - \varepsilon 2^{-n}, q_n + \varepsilon 2^{-n})$, donde $\{q_n\}_n$ es una enumeración de $\mathbb{Q}$, y haciendo $\varepsilon \to 0$.
   iii) Usar el hecho que $[0, 1] = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}$ para mostrar que una unión no-enumerable de conjuntos de medida nula no es necesariamente de medida nula.

6. Considere el espacio mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Determine todos los conjuntos de medida nula en la medida $\delta_a + \delta_b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

7. **Medidas Invariantes.** Sea $(X, \mathcal{A}\mu)$ un espacio de medida finita, donde $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G})$ para algún conjunto generador $\cap$-estable $\mathcal{G}$. Asuma que $T : X \to X$ es un mapa tal que $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, para todo $A \in \mathcal{A}$.
   Pruebe que

$$\mu(G) = \mu\big(T^{-1}(G)\big),\ \forall\ G \in \mathcal{G} \implies \mu(A) = \mu\big(T^{-1}(A)\big),\ \forall\ A \in \mathcal{A}.$$

   (Una medida μ con esta propiedad se dice es *invariante* con respecto del mapa T).

8. **La Medida de Stieltjes.** Sea μ una medida en $(\mathbb{R};\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que $\mu[-n,n)<\infty$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Muestre que la función

$$F_\mu(x)=\begin{cases}\mu[0,x), & x>0;\\ 0 & x=0;\\ -\mu[x,0), & x<0.\end{cases}$$

es una función monótona continua por la izquierda $F_\mu:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
(Recordemos que las funciones monótonas crecientes y continuas por la izquierda se llaman *funciones de Stieltjes*).

i) Sea $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de Stieltjes. Mostrar que

$$\nu_F([a,b))=F(b)-F(a),\quad a,b\in\mathbb{R},\ a<b,$$

posee una única extensión a una medida sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

ii) Concluya que para toda medida μ en $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, con $\mu[-r,r)<\infty$, $r>0$, existe una función de Stieltjes $F=F_\mu$, tal que $\nu=\mu_F$.

iii) ¿Cuál es la función de Stieltjes F que corresponde a la medida de Lebesgue 1-dimensional λ?

iv) ¿Cuál es la función de Stieltjes F que corresponde a la medida de Dirac δ_0?

v) Mostrar que F_μ es continua en $x\in\mathbb{R}$ si, y sólo si, $\mu\{x\}=0$.
