Teoría de la Medida e Integración 2022

Lista 02

27.febrero.2022

1. Sea $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ una secuencia de conjuntos Lebesgue mesurables. Mostrar que:

   a) Si $E_k \nearrow E$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} |E_k| = |E|$.

   b) Si $E_k \searrow E$, y $|E_k| < \infty$, $\forall k$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} |E_k| = |E|$.

2. (a) Construir un subconjunto de $[0,1]$ usando la misma estrategia que el conjunto de Cantor, excepto que en el k-ésimo paso, cada intervalo removido tiene longitud $\frac{\delta}{3^k}$, con $0 < \delta < 1$. Mostrar que el conjunto resultante es perfecto, no contiene intervalos, y que posee medida de Lebesgue $1 - \delta$.

   (b) Construir un subconjunto de $[0,1]$ al estilo Cantor, pero removiendo en el k-ésimo paso un subintervalo de longitud θ_k, con $0 < \theta_k < 1$. Mostrar que el conjunto remanente posee medida cero si, y sólo si, $\sum_k \theta_k = +\infty$.

3. Pruebe que si E_1 y E_2 son subconjuntos Lebesgue mesurables en $\mathbb{R}$, entonces $E_1 \times E_2$ es Lebesgue mesurable en $\mathbb{R}^2$, y que

   $$|E_1 \times E_2| = |E_1| \cdot |E_2|.$$

   (Aquí interpretamos $0 \cdot \infty$ como 0.) (Hint: Usar alguna caracterización de mesurabilidad.)

4. Definimos la **medida interior (de Lebesgue)** de $E \subseteq \mathbb{R}^n$, como

   $$|E|_i = \sup |F|, \text{ donde el supremo se toma sobre todos los subconjuntos cerrados } F \subseteq E.$$

   Mostrar que

   i) $|E|_i \leq |E|_e$,

   ii) Si $|E|_e < +\infty$, entonces E es Lebesgue measurable si, y sólo si, $|E|_i = |E|_e$.

5. Dar un ejemplo para mostrar que la imagen de un conjunto (Lebesgue) mesurable, por una función continua, no necesariamente es (Lebesgue) mesurable. (Hint: Considere la función de Cantor–Lebesgue).

6. (a) ¿ Cuál es la σ-álgebra de $\mathbb{R}$ generada por los subconjuntos unitarios $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$?
   (b) Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mesurable. Demuestre que no puede haber una σ-álgebra $\mathcal{A}$ que contiene una cantidad infinita enumerable de miembros.
   (Hint: recuerde que $A \in \mathcal{A}$ es un átomo si A no contiene un subconjunto propio $\emptyset \neq B \in \mathcal{A}$, y mostrar que $\#\mathcal{A} = \#\mathbb{N}$ implica que $\mathcal{A}$ tiene una cantidad infinita enumerable de átomos.)

7. (i) Dar un ejemplo de dos σ-álgebras $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ en X cuya unión no es una σ-álgebra.
   (ii) Dar un ejemplo de una secuencia $\{\mathcal{A}_n\}_n$ estrictamente creciente de σ-álgebras en X, es decir, $\mathcal{A}_n \subsetneq \mathcal{A}_{n+1}$, cuya unión $\mathcal{A} = \bigcup_n \mathcal{A}_n$ no es una σ-álgebra.

8. Probar el Teorema π-λ:
   Sea $\mathcal{P}$ un π-sistema en X y $\mathcal{D}$ un λ-sistema en X, con $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{D}$. Entonces $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{D}$.