Teoría de la Medida e Integración 2022

Lista 01

29.enero.2022

1. a) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Probar que si f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto de f en $[a, b]$, entonces.
$$\int_a^b f\, df = \frac{1}{2}\big(f(b)^2 - f(a)^2\big).$$
   b) Mostrar que la función $f(x) = \lfloor x \rfloor$, no es Riemann-Stieltjes integrable respecto de ella misma f en el intervalo $[0, 2]$.

2. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas. Suponga que f es Riemann-Stieltjes integrable respecto de g en $[a, b]$. Si $g_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ es tal que $g_1(x) = g(x)$, excepto en un número finito de puntos, entonces, f es también g_1 integrable y
$$\int_a^b f\, dg = \int_a^b f\, dg_1.$$

3. Realizar el Proyecto 29 α, páginas 252-253 libro de Bartle. Items (a)-(f).

4. Mostrar que la función $f \to V_f[a, b]$ no define una norma en $BV(a, b)$, pero $||f||_{BV} = |f(a)| + V_f[a, b]$ sí es norma.

5. a) Mostrar que la función dada por $f(0) = 0$, y $f(x) = x\, \sin(\frac{1}{x})$ es continua en $[0, 1]$, pero no es de variación limitada.
   b) Mostrar que la función dada por $f(0) = 0$, y $f(x) = x^2\, \sin(\frac{1}{x})$ es continua en $[0, 1]$ y sí posee variación limitada.
   c) (No entregar) En general, $f(x) = x^a\, \sin(\frac{1}{x^b})$ es de variación limitada en $[0, 1]$, si $a > b > 0$, pero no tiene variación limitada si $0 < a \leq b$.

6. Una curva $y = f(x)$ es rectificable (tiene longitud de arco finita) en $[a, b]$ si, y sólo si, $f \in BV(a, b)$.

7. Mostrar que si $f \in BV(a, b)$ y $a \leq c \leq b$ es cualquier punto intermedio, entonces las restricciones de $f|_{[a,c]}$ y $f|_{[c,b]}$ son de variación limitada, y $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

8. Pruebe que si f es de variación limitada en $[a, b]$, entonces $f = g - h$ puede representarse como la diferencia de dos funciones no-decrecientes en $[a, b]$.
(Sugerencia: considerar $g(x) = V_a^x(f)$)

9. Evaluar las siguientes integrales de Riemann-Stieltjes:
$$(a) \int_{-2}^{2} x\, d\lfloor x \rfloor, \qquad (b) \int_0^4 x^2\, d\lfloor x^2 \rfloor, \qquad (c) \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, d(|\sin x|).$$

10. Probar el **Teorema de Convergencia Monótona** para Riemann-Stieltjes.
Sea f_n una secuencia monótona de funciones integrables con respecto de una función creciente g en $[a, b]$. Si la función $f = \lim_n f_n$ es integrable con respecto de g en $[a, b]$, entonces
$$\int_a^b f\, dg = \lim_n \int_a^b f_n\, dg.$$