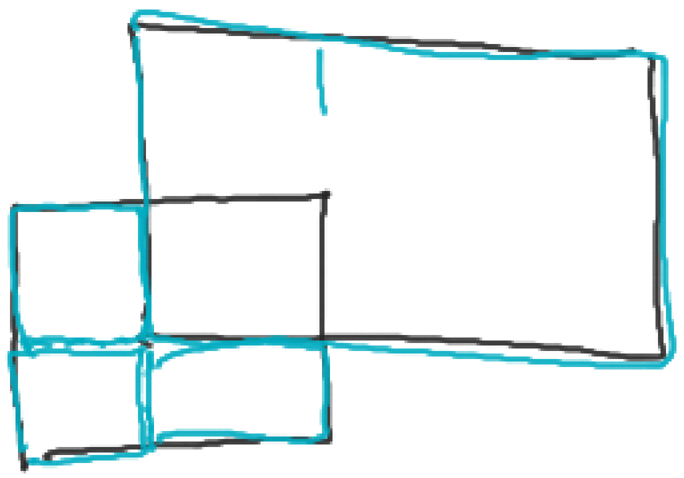
Medidas Producto: Estudiar medidas en espacios $X_1 \times X_2$.

Def: $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ son espacios de medida. Un conjunto de la forma $A\times B \subseteq X\times Y$, con $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$, se llama <u>rectángulo mesurable</u>. Sea.

$$\mathcal{Z}_0 = \left\{ \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} (A_i \times B_i) : n\in\mathbb{N},\ A_i\in\mathcal{A},\ B_i\in\mathcal{B} \right\} \subseteq X\times Y$$



Obs! Todo subconjunto en $\mathcal{Z}_0$ es unión disjunta de rectángulos mesurables

$\mathcal{Z}_0$ es un álgebra de conjuntos en $X\times Y$

(no es σ-álgebra). σ = enumerable

Denotamos por $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{Z}_0)$ la σ-álgebra generada por $\mathcal{Z}_0$.

Queremos definir una medida π en $X\times Y$ que satisfaga una identidad "natural"

$$(*) \qquad \pi(A\times B) = \mu(A)\,\nu(B), \quad \forall A\in\mathcal{A}, \forall B\in\mathcal{B}.$$

Teorema: (Medida Producto). Sean $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ esp. de medida.
Entonces existe una medida π sobre $X\times Y$ tal que vale $(*)$.
Si ambos espacios X y Y son σ-finitos, entonces π es única.

Prueba: Suponga que el rectángulo $A\times B \subseteq X\times Y$ es unión disjunta de rectángulos $\{A_j\times B_j\}_{j\geq 1}^{\infty}$. Entonces

$$\mathbb{1}_{A\times B}(x,y) = \mathbb{1}_A(x)\,\mathbb{1}_B(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{1}_{A_j}(x)\,\mathbb{1}_{B_j}(y)}_{\geq 0}.$$

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j}(x)\mathbb{1}_{B_j}(y)\right\}_n \text{ es } \nearrow.$$

Por Conv. Monótona, integrando respecto de ν

$$\mathbb{1}_A(x)\int_Y \mathbb{1}_B(y)\,d\nu = \int_Y \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y)\,d\nu = \int \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_j}(x)\mathbb{1}_{B_j}(y)\,d\nu$$

$$\mathbb{1}_A(x)\int_Y \mathbb{1}_B(y)\,d\nu = \mathbb{1}_A(x)\,\nu(B) \qquad \int \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_j}(x)\mathbb{1}_{B_j}(y)\,d\nu = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j}(x)\,\nu(B_j)$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbb{1}_A(x)\,\nu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_j}(x)\,\nu(B_j).$$

Por Conv. Monótona, integrando en μ:

$$\underline{\mu(A)\,\nu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\,\nu(B_j).}$$

Sea $E \in \mathcal{Z}_0$, sabemos que $E = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} (A_i \times B_i)$, $A_i \in \mathcal{A}$, $B_i \in \mathcal{B}$. Definimos

$$\pi(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\,\nu(B_i).$$

π está bien definida en $\mathcal{Z}_0$ y es enumerablemente aditiva.

Por el T. de Carathéodory, π se puede extender a una medida π en $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{Z}_0)$.

$\square$

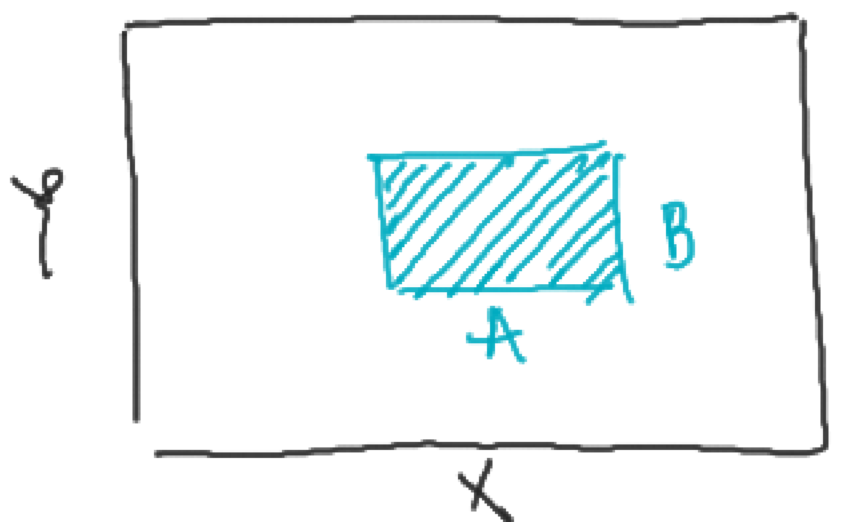
<u>Notación</u>: $\pi = \mu \times \nu$ es <u>la medida producto</u> de μ y ν.

y la σ-álgebra $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ es la <u>σ-álgebra producto</u>.

El <u>espacio producto</u> de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ es

$$(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu).$$

$$\pi(A \times B) = (\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B)$$



$X \times Y$

$A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.

Def: $E\subseteq X\times Y$, $x\in X$, $y\in Y$. La *x-sección* de E es el conjunto

$$E_x=\{y\in Y : (x,y)\in E\}.$$

y la *y-sección* de E es el conjunto

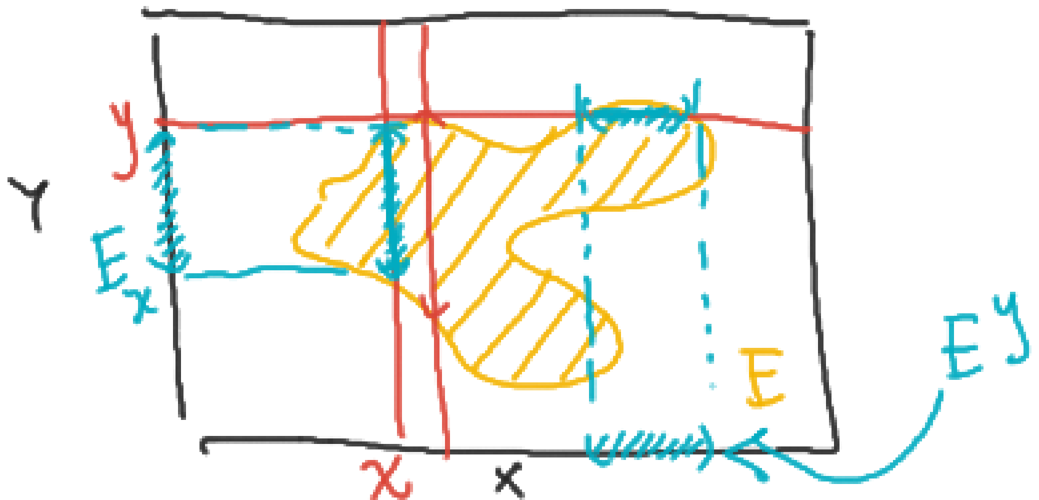
$$E^y=\{x\in X : (x,y)\in E\}.$$

Def: Sea $f: X\times Y\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ función. La *x-sección* de f es $f_x: Y\to\overline{\mathbb{R}}$

$$f_x(y)=f(x,y)$$

y la *y-sección* de f es la función $f^y: X\to\overline{\mathbb{R}}$

$$f^y(x)=f(x,y).$$



$$f_x = Y \xhookrightarrow{i_x} \{x\}\times Y \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}}$$

$$f^y = X \xhookrightarrow{i_y} X\times\{y\} \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}}$$

Prop: • Si $E \subseteq X \times Y$ es mesurable $\Rightarrow$ E_x, E^y son mesurables, $\forall x \in X, \forall y \in Y$

• Si $f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ es mesurable $\Rightarrow$ f_x, f^y son mesurables, " .

Lema: Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos. Si $E = A \times B$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, entonces. las funciones definidas por $f: X \to \mathbb{R}$ y $g: Y \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \nu(E_x), \qquad g(y) = \mu(E^y).$$

son mesurables, y

$$\int_X f \, d\mu = \pi(E) = \int_Y g \, d\nu$$

$$\pi(E) = \int_{X \times Y} \mathbb{1}_E \, d\pi$$

<u>Prueba:</u> (Idea). Definimos

$$\mathcal{M} = \{ E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} : \text{la prop vale en } E \}$$

Mostrar que $\mathcal{M}$ es una clase monótona y que contiene a $\mathcal{Z}_0$.

+ <u>Lema de Clases Monótonas</u> $\Rightarrow \sigma(\mathcal{Z}_0) = \mathcal{A} \times \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$. $\square$

<u>Teorema:</u> (de Tonelli). Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ esp. medida σ-finitos y $F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}_0$ función mesurable y no-negativa. Entonces, las funciones $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ dadas por

$$f(x) = \int_Y F_x \, d\nu \quad , \quad g(y) = \int_X F^y \, d\mu .$$

son mesurables y

vale

$$\int_X f\,d\mu = \int_{X\times Y} F\,d\pi = \int_Y g\,d\nu$$

σ-finito
$f \geq 0$

En otras palabras

$$\int_X \left(\int_Y F\,d\nu \right) d\mu = \iint_{X\times Y} F\,d\pi = \int_Y \left(\int_X F\,d\mu \right) d\nu .$$

Prueba (parcial):

- Si $F = \mathbb{1}_E$, $E \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}$, entonces el resultado se reduce al lema anterior.

$$f(x) = \int_Y F_x\,d\nu = \int_Y \mathbb{1}_{E_x}(y)\,d\nu = \nu(E_x)$$
$$g(y) = \int_X F^y\,d\mu = \int_X \mathbb{1}_{E^y}(x)\,d\mu = \mu(E^y) \;\ldots$$

$$\int f\,d\mu = \int \nu(E_x) = \pi(E) = \int \mu(E^y)\,d\nu = \int g\,d\nu. \quad \checkmark$$

- Si F es función simple $\Rightarrow F = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{E_j}$. Por linealidad, la propiedad vale.

- Si F es mesurable y no-negativa. Del lema del Sombrero, existe una secuencia creciente $\{F_n\}_{n\geq 1}$ de funciones simples con $F_n \nearrow F$. De convergencia monótona.

Definimos $\varphi_n(x) = \int_Y (F_n)_x \, d\nu$, $\quad \gamma_n(y) = \int_X (F_n)^y \, d\mu$

$$F_n \nearrow F \Rightarrow \varphi_n = \int (F_n)_x \, d\nu \nearrow \int F_x \, d\nu = f$$

$$\Rightarrow \gamma_n = \int (F_n)^y d\mu \nearrow \int F^y d\mu = g$$

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \lim \varphi_n \, d\mu = \lim \int_X \varphi_n \, d\mu = \lim \int_X \int_Y (F_n)_x \, d\pi = \lim \int_{X\times Y} F \, d\pi$$

$$\int_Y g \, d\mu = \int_Y \lim \gamma_n \, d\nu = \quad " \quad \lim \int_Y \int_X (F_n)^y \, d\pi = \lim \int_{X\times Y} F \, d\pi$$

Teorema: (de Fubini). $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ esp. de medida σ-finitos y sea $\pi=\mu\times\nu$ la medida producto. Si $F: X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es π-integrable L^1, entonces las funciones f y g definidas en el Teorema de Tonelli:

$$f(x)=\int_Y F_x\,d\nu \qquad g(y)=\int_X F^y\,d\mu$$

tienen integral finita y

$$\int_X f\,d\mu=\int_{X\times Y} F\,d\pi=\int_Y g\,d\nu.$$

$$\left[\quad \int_X\left(\int_Y F\,d\nu\right)d\mu=\iint_{X\times Y} F\,d(\mu\times\nu)=\int_Y\left(\int_X F\,d\mu\right)d\nu \quad\right].$$