Modos de Convergencia:

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio medida. Existen diferentes nociones de convergencia asociados a funciones en $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$.

1

Def: Sea $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ una sec. de funciones mesurables, y sea $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$

Decimos que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge puntualmente a f si para todo $\varepsilon>0$, y $\forall x \in X$ $\exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N(\varepsilon, x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Notación: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. $f_n \longrightarrow f$.

Def: $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f si $\forall \varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Notación: $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$, f es el límite uniforme de las f_n.

Def: $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge casi en todo punto (c.t.p.) a f si existe $M \in \mathcal{A}$ con $\mu(M)=0$ tal que $\forall \varepsilon>0$ y todo $x \in X-M$, existe $N(\varepsilon,x) \in \mathbb{N}$, tal que

$$n \geq N(\varepsilon,x) \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad (\forall x \in X-M).$$

Notación: $f_n \xrightarrow{\text{c.t.p.}} f$.

Obs! • convergencia uniforme $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ convergencia puntual $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ convergencia c.t.p.

Def: $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge en medida a f si $\forall \varepsilon>0$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x\in X : |f_n(x)-f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Notación: $f_n \xrightarrow{\mu} f$

Def: Si $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^p(X)$ y $f\in L^p(X)$, decimos que $\{f_n\}$ converge en L^p a f si $\forall \varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que

$$n\geq N(\varepsilon) \Rightarrow \underbrace{\|f_n-f\|_p}_{\left(\int |f_n-f|^p d\mu\right)^{1/p}} < \varepsilon.$$

$$\left(\int |f_n-f|^p d\mu\right)^{1/p} < \varepsilon$$

Notación: $f_n \xrightarrow{L^p} f$

Teorema: Sea $\mu(X) < \infty$ y $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^p(X)$ que converge uniformemente a f.
Entonces, $f \in L^p(X)$ y $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge en L^p a f.

Prueba: Sea $\varepsilon > 0$ y sea $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in X.$$

Si $n \geq N(\varepsilon)$, entonces

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int \varepsilon^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left(\varepsilon^p \int d\mu \right)^{1/p}$$

$$\leq \varepsilon \cdot \mu(X) = \tilde{\varepsilon}.$$

$\square$

Obs! $\boxed{\text{Convergencia uniforme} \Rightarrow \text{Convergencia } L^p}$

$\not\Leftarrow$

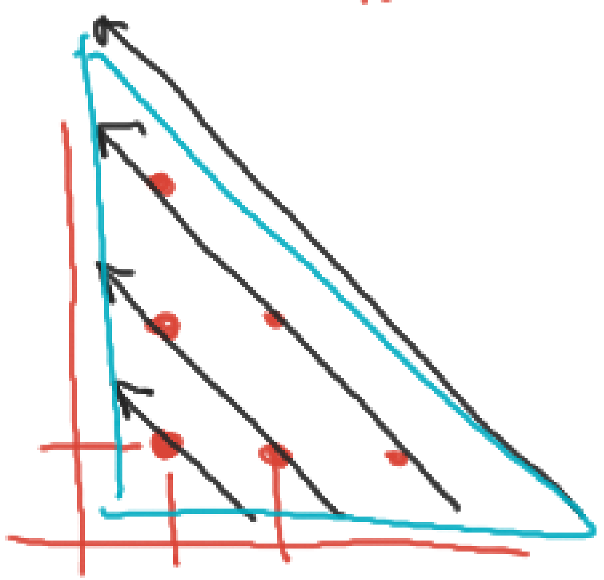
Ejemplo: $X=[0,1]$, $\mathcal{A}=\mathcal{B}(X)$, $\mu=\lambda^1$.

Consideramos los intervalos

$$\underset{I_1}{[0,1]},\ \underset{I_2}{[0,1/2]},\ \underset{I_3}{[1/2,1]},\ \underset{I_4}{[0,1/3]},\ \underset{I_5}{[1/3,2/3]},\ \underset{I_6}{[2/3,1]},\ \underset{I_7}{[0,1/4]},\ [1/4,1/2],\ [1/2,3/4],\ \underset{I_{10}}{[3/4,1]},\ \ldots$$

Definamos $\{f_n\}_{n\geq 1}\in\mathcal{M}(\mathcal{A})$ por

$$f_n = \mathbb{1}_{I_n}.$$



y sea $f\equiv 0$.

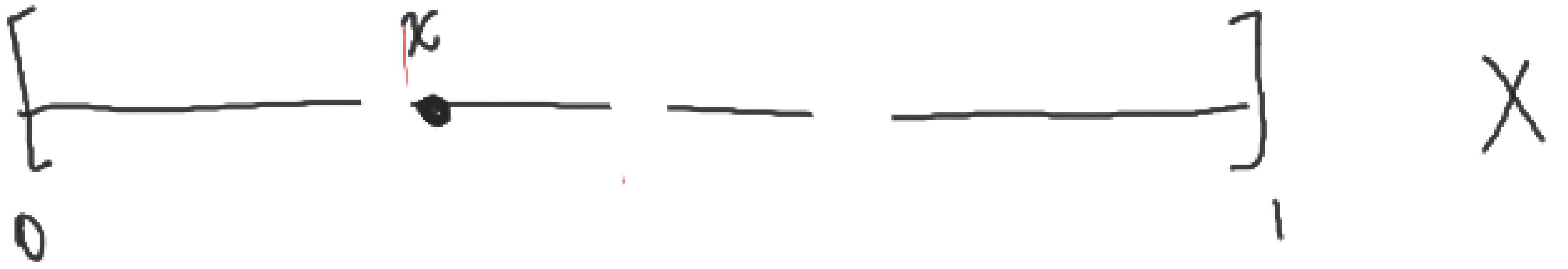
$$n=\frac{m(m+1)}{2}=\binom{m+1}{2}=\sum_{i=1}^{m} i \qquad \text{Si } n\geq\frac{m(m+1)}{2} \Rightarrow f_n \text{ es una}$$

indicadora en un intervalo de longitud $\leq 1/m$

$$\Rightarrow \|f_n-f\|_p^p=\int|f_n-f|^p\,d\mu=\int|f_n|^p\,d\mu=\int|\mathbb{1}_{I_n}|^p\,d\mu=\int|\mathbb{1}_{I_n}|\,d\mu$$
$$=\int\mathbb{1}_{I_n}\,d\mu=\mu(I_n)\leq 1/m.$$

$\Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{L^p} f, \quad \forall p \geq 1.$

Por otro lado, $\forall x \in X$ fijo, $\{f_n\}$ posee una subsecuencia idénticamente igual a 1, y otra idénticamente igual a 0.



$\Rightarrow \quad f_n(x)$ no converge $\quad \Rightarrow \quad f_n \not\to f$. en particular

$f_n \overset{unif}{\not\rightrightarrows} f.$

<u>Teorema:</u> $\quad f_n \overset{unif}{\rightrightarrows} f \quad \Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{\mu} f.$

$\not\Leftarrow$

Def: $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es casi uniformemente convergente a f si para todo $\delta>0$, existe $E_\delta \in \mathcal{A}$ con $\mu(E_\delta)<\delta$ y tal que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f en $X-E_\delta$.

Notación: $f_n \xrightarrow[\text{unif}]{\text{almost}} f$

Obs! $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es Cauchy en medida $\not\Rightarrow$ $\{f_n\}$ converge en medida.

Podemos rescatar un res. análogo a Bolzano–Weierstraß.

Teorema: (Riesz). Si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy en medida. Entonces, existe una subsecuencia $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ que converge c.t.p. y converge en medida a $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$.

$\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon):\quad \lim_{m,n\to\infty} \mu(\{x\in X: |f_m(x)-f_n(x)|\geq \varepsilon\}) = 0.$

Jerarquía de modos de convergencia

$$
\begin{tikzcd}
 & f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] & & \\
f_n \to f \arrow[d, Rightarrow] & f_n \xrightarrow{L^p} f,\ \forall p \geq 1 & f_n \xrightarrow{\mu} f \arrow[r, Rightarrow, shift right, "\text{subsec.}"'] & f_n \xrightarrow{\text{almost unif}} f \arrow[l, Rightarrow, shift right] \\
f_n \xrightarrow{\text{c.t.p.}} f & & \{f_n\}\ \mu\text{-Cauchy} \arrow[u, Rightarrow, "\text{subsec.}"'] \arrow[ll, Rightarrow, "\text{subsec.}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Espacios de Probabilidad $\quad (X, \mathcal{A}, \mu) = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

$\{X_n\}_{n\geq 1}$ secuencia de v.a. $\quad X$ v.a. definida en Ω.

Def: $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge en distribución a X (converge débilmente, o converge en ley) si

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

F_n = dist ac. de X_n
F = " " X

$$X_n \xrightarrow{d} X$$

Def: $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge en probabilidad a X si $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

$X_n \xrightarrow{\mu} X$
conv en medida

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$$

Def: $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge casi seguramente a X si (almost surely)

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1.$$

$X_n \xrightarrow{a.s.} X$

$X_n \xrightarrow{c.t.p.} X.$

Def: $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge puntualmente X si

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Def: $\{X_n\}_{n\geq 1}$ convergen en L^p a X (converge en media de orden p)

si
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|^p\right) = 0.$$

$$\mathbb{E}\left(|X_n - X|^p\right) = \int_\Omega |X_n - X|^p \, d\mathbb{P} = \| X_n - X \|_p^p$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & X_n \xrightarrow{L^s} X \arrow[rr, Rightarrow] & & X_n \xrightarrow{L^p} X \text{ , } \forall s \geq p \geq 1 \arrow[d, Rightarrow] & & \\
X_n \to X \arrow[rr, Rightarrow] & & X_n \xrightarrow{a.s.} X \arrow[rr, Rightarrow, shift left] & & X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \arrow[ll, Rightarrow, shift left, "\text{subsec.}"] \arrow[rr, Rightarrow] & & X_n \xrightarrow{d} X
\end{tikzcd}
$$