Espacios L^p:

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida

- X espacio vectorial normado
- X topológico

Def: V espacio vectorial. Una norma en V es una función $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ y satisface

i) $\|x\| \geq 0, \ \forall x \in V$ i.i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall x \in V$

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in V$.

Si $\|x\|$ no satisfa (i.i) se llama semi-norma o pseudonorma.

$(V, +, \cdot, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado.

Ej: $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R}, \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado con

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad p \geq 1.$$

norma p
ó norma de
Minkowski

Ej: $(B(X), +, \cdot, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ es un espacio normado con

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

$$B(X) = \{ f: X \to \mathbb{R} : \ \sup |f(x)| < \infty \}.$$

Def: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Recordemos que

$$L^1(\mu) = \{ f: X \to \mathbb{R} : \ f \text{ es } \mu\text{-integrable} \}$$

$$= \{ f: X \to \mathbb{R} : \ \int |f| \, d\mu < \infty \}$$

Definimos una norma en $L^1(\mu)$ como

$$\|f\|_\mu = \int |f|\, d\mu < \infty$$

<u>Lema</u>: $L^1(\mu)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\|\cdot\|_\mu$ es una semi-norma

Más aun $\|f\|_\mu = 0 \iff f=0$ μ-c.t.p.

<u>Prueba</u>: • Ya vimos que $L^1(\mu)$ es un espacio lineal $(f,g\in L^1 \Rightarrow \alpha f+\beta g\in L^1)$

• Mostramos que $\|\cdot\|_\mu$ es semi-norma:

i) $\|f\|_\mu = \int |f|\, d\mu \geq 0, \ \forall f\in L^1(\mu)$.

ii) $\|\alpha f\|_\mu = \int |\alpha f|\, d\mu = \int |\alpha|\cdot|f|\, d\mu = |\alpha| \int |f|\, d\mu = |\alpha|\cdot\|f\|_\mu$.

iii) $\|f+g\|_\mu = \int |f+g|\, d\mu \leq \int (|f|+|g|)\, d\mu = \int |f|\, d\mu + \int |g|\, d\mu$

$$\leq \|f\|_\mu + \|g\|_\mu.$$

Finalmente $\|f\|_\mu = 0 \iff \int |f|\, d\mu = 0 \iff |f| = 0$ μ-c.t.p $\iff f=0$ μ-c.t.p $\square$

Def: Dos funciones $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(\mu)$ son <u>μ-equivalentes</u> si $f_1 = f_2$ μ-c.t.p.

Definimos el <u>espacio</u> <u>de Lebesgue</u> $L^1(X)$ como el conjunto de todas las clases de μ-equivalencia de funciones integrables

$$L^1(x) = \mathcal{L}^1(\mu) / \sim_\mu = \{ [f] : f \in \mathcal{L}^1(\mu) \}$$

Definimos la <u>norma L^1</u> como $\|\cdot\|_{L^1} = \|\cdot\|_1 : L^1(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\|f\|_1 = \|[f]\|_1 = \int |f| \, d\mu .$$

$\left(\|[f]\|_1 = 0 \iff [f] = [0] \right)$. / $\|\cdot\|_1$ es norma!

<u>Teorema:</u> $\|\cdot\|_1$ es una norma en $L^1(X)$ $\Rightarrow$ $(L^1(X), +, \cdot, \mathbb{R}, \|\cdot\|_{L^1})$ esp. vect. normado.

De igual forma, para $1 \leq p < \infty$, y consideramos

$$L^p(\mu) = \{ f : X \to \mathbb{R} : \int |f|^p \, d\mu < \infty \}$$

funciones de potencia p integrable

$$\left(f \in L^p(\mu) \iff f^p \in L^1(\mu) \right)$$

y tenemos la seminorma $\|f\|_\mu = \int |f|^p \, d\mu$, $f \in L^p(\mu)$.

Tomando el cociente

$$L^p(X) = L^p(\mu) / \sim_\mu = \{ [f] : f \in L^p(\mu) \}.$$

este es el <u>espacio de Lebesgue L^p</u>, y tiene la norma L^p

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \|[f]\|_p = \int |f|^p \, d\mu . < \infty$$

$p \geq 1$

Obs! • $L^p(X)$ es espacio vectorial normado, $\forall\, 1 \leq p < \infty$.

• $L^p(X)$ es un espacio de Banach $\begin{cases} \text{es normado} \\ \text{es completo (toda seq. de Cauchy converge).} \end{cases}$

Algunas desigualdades importantes:

Teorema: (Desigualdad de Hölder). Sean $f \in L^p(X)$ y $g \in L^q(X)$, con $\boxed{1/p + 1/q = 1}$ $(p, q > 1)$. Entonces $fg \in L^1(X)$ y $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$,

Esto es

$$\int |fg|\,d\mu \leq \left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int |g|^q\,d\mu\right)^{1/q}.$$

Prueba: Ver Capítulo 6, Bartle.

Obs! • $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \iff p+q=pq$

Dos números $p,q>1$ que cumplen la relación arriba se llaman <u>índices</u> <u>conjugados</u>.

$p=q=2 \Rightarrow$ 2 es el único índice auto-conjugado.

Tomando la Desigualdad de Hölder con $p=q=2 \Rightarrow \|fg\|_1 \leq \|f\|_2\|g\|_2$

$$\Rightarrow \int |fg|\,d\mu \leq \left(\int |f|^2 d\mu\right)^{1/2}\left(\int |g|^2 d\mu\right)^{1/2}$$

Análisis Armónico (Fourier L^2)

$$\Rightarrow \left(\int |fg|\,d\mu\right)^2 \leq \left(\int |f|^2 d\mu\right)\left(\int |g|^2 d\mu\right) \qquad f,g\in L^2(X)$$

Teorema: (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Si $f, g \in L^2(X)$ entonces fg es integrable y

$$\left| \int fg \, d\mu \right| \leq \int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \qquad \square$$

Teorema: (Desigualdad de Minkowsky), Si $f, g \in L^p(X)$, con $p \geq 1$, entonces

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Prueba: Ver Cap 6, Bartle. $\square$

<u>Def:</u> Una secuencia $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^p(X)$ es <u>de Cauchy</u> si para todo $\varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$m,n \geq N(\varepsilon) \implies \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon.$$

Una secuencia $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^p(X)$ <u>converge</u> a $f \in L^p(X)$ si para todo $\varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N(\varepsilon) \implies \|f_n - f\|_p < \varepsilon.$$

<u>Def:</u> Un espacio vectorial es <u>completo</u> si toda sec. de Cauchy converge a algún elemento del espacio.

<u>Obs!</u>

- Toda sec. convergente $\{f_n\}$ $\implies$ $\{f_n\}$ es de Cauchy.

$$\not\Leftarrow$$

Teorema: (de Completitud). Para todo $1 \leq p < \infty$, el espacio $L^p(X)$ es un espacio lineal, normado con la norma

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

y completo. Esto es $L^p(X)$ es un espacio de Banach. $\square$

$L^\infty(X)$ es también espacio de Banach. $\square$