Aplicación 1: Integrales dependientes de un parámetro

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $u : X \times (a,b) \to \mathbb{R}$,

$u = u(x,t)$, $x \in X$, $t \in (a,b)$ parámetro.

Estamos interesados en propiedades de integrales del tipo

$$U(t) = \int_X u(x,t)\, \mu(dx) \qquad t \in (a,b).$$

Teorema: (de Continuidad) Sea $(a,b) \neq \emptyset$, $u : X \times (a,b) \to \mathbb{R}$ que satisface:

i) $x \mapsto u(x,t) \in L^1(\mu)$, $\forall t \in (a,b)$

ii) $t \mapsto u(x,t)$ es continua, $\forall x \in X$

iii) $|u(x,t)| \leq w(x)$, $\forall (x,t) \in X \times (a,b)$. para alguna $w \in L^1(\mu)$.

Entonces, la función $U:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$U(t) = \int_X u(x,t)\, \mu(dx)$$

es continua.

Prueba: El mapa $t \longrightarrow \underbrace{\int_X u(x,t)\, \mu(dx)}_{\text{existe}}$ está bien definido, ya que

$x \mapsto u(x,t) \in L^1(\mu)$. y $\int u(x,t)\, \mu(dx) < \infty$. (i)

Vamos a mostrar que para cada $t \in (a,b)$ y cada secuencia $\{t_n\}_n \subseteq (a,b)$ con $t_n \to t$, vale

$$\lim_{n\to\infty} U(t_n) = U(t).$$

Por (ii), $t \mapsto u(x,t)$ es continuo, luego

$$u_n(x) = u(x,t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(x,t).$$

y por (iii) $|u_n(x)| = |u(x,t_n)| \leq w(x), \ \forall t_n \Rightarrow u_n \in L^1(\mu)$ son integrables $\forall n$.

Por Convergencia Dominada $u_n \in L^1(\mu) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x,t) \in L^1(\mu)$

y

$$U(t) = \int_X u(x,t)\,\mu(dx) = \int \lim_{n\to\infty} u_n(x)\,\mu(dx)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_X u_n(x)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X u(x,t_n)\,\mu(dx).$$

$$= \lim_{n\to\infty} U(t_n).$$

$\therefore$ $U(t)$ es continua. $\square$

Teorema (de Diferenciabilidad). Si $u: X \times (a,b) \to \mathbb{R}$ satisface

i) $x \mapsto u(x,t) \in L^1(\mu)$, $\forall t \in (a,b)$.

ii) $t \mapsto u(x,t)$ es diferenciable en t, $\forall x \in X$

iii) $\left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right| \leq w(x)$, $\forall (x,t) \in X \times (a,b)$, para alguna $w \in L^1(\mu)$.

Entonces, $U: (a,b) \to \mathbb{R}$ dada por

$$U(t) = \int_X u(x,t)\, \mu(dx)$$

es diferenciable en (a,b) y

$$\boxed{\frac{d}{dz} \int = \int \frac{\partial}{\partial z}} \qquad \frac{d}{dt} U(t) = \int_X \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, \mu(dx). \qquad \square$$

Regla de Leibniz.

Aplicación 2: Integrales Impropias

Def: (Riemann)

$$\text{extensión} \quad \overbrace{\int_0^{\infty}}^{\text{no}} u(x)\,dx = \lim_{a\to\infty} \underbrace{\int_0^{a} u(x)\,dx}_{\text{Riemann}}.$$

siempre que el límite exista.

Obs! La integral de Lebesgue no extiende integrales impropias.

Corolario: Sea $u: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, función Borel mesurable (en λ'), y Riemann integrable sobre todo intervalo $[0,n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

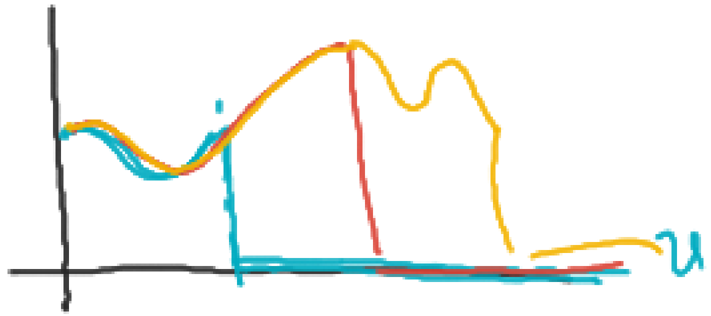
Entonces, $\underbrace{u \in \mathcal{L}^1[0,\infty)}_{\int |u|\,d\lambda' < \infty} \iff \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^n |u(x)|\,dx}_{\lim_{n\to\infty}\int_0^n |u|\,dx = \int_0^\infty |u|\,dx < \infty}$ existe $(<\infty)$.

En ese caso $\int_{[0,\infty)} u\,d\lambda' = \int_0^\infty u(x)\,dx$.

(Media) <u>Prueba:</u> $(\Leftarrow)$

$$\int_0^n u(x)\,dx = \int_{[0,n]} u\,d\lambda^1 = \int u\cdot \mathbb{1}_{[0,n]}\,d\lambda^1$$

Como $\{u\mathbb{1}_{[0,n]}\}_{n\geq 1}$ es una secuencia de funciones en $\mathcal{L}^1(\lambda^1)$,



que es monótona creciente, y

$$u\mathbb{1}_{[0,n]} \nearrow u.$$

Por el T. Convergencia Monótona, $u \in \mathcal{L}^1(\lambda^1)$ y

$$\int_{[0,\infty)} u\,d\lambda^1 = \int_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} u\mathbb{1}_{[0,n]}\,d\lambda^1 = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)} u\mathbb{1}_{[0,n]}\,d\lambda^1$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]} u\,d\lambda^1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^n u(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty u(x)\,dx. <\infty.$$

$\square$

Ejemplo: (Integral de Lebesgue no permite cancelaciones).

La función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $x \in (0,\infty)$ es Riemann integrable, pero no es Lebesgue integrable ($f \notin L^1(0,\infty)$).

Si $f \in L^1(0,\infty) \Rightarrow |f| \in L^1(0,\infty)$. Bastaría mostrar que $|f| \notin L^1(0,\infty)$.

Sabemos (del corolario anterior)

$$\int_{[0,n]} |f| \, d\lambda^1 = \int_0^n |f(x)| \, dx \quad \Rightarrow \quad \int_{(0,\infty)} |f| \, d\lambda^1 = \int_0^\infty |f(x)| \, dx \boxed{= \infty}$$

a probar.

Para ello,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \lim_{a \to \infty} \left[\int_0^{n\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx + \underbrace{\int_{n\pi}^{a} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \right] = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\int_{i\pi}^{(i+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx}_{a_i}$$

Aquí estamos usando

$$\left|\lim_{a\to\infty}\int_{n\pi}^{a}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx\right| \le \lim_{n\to\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right|dx \le \lim_{n\to\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\max_{n\pi\le x\le(n+1)\pi}\left|\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right|dx$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n\pi}=0.$$

$$\operatorname{sen}(y+i\pi)=\operatorname{sen}y\,\overset{(-1)^i}{\cancel{\cos(i\pi)}}+\cancel{\cos y\,\operatorname{sen}(i\pi)}$$

$$a_i=\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(y+i\pi)}{y+i\pi}\,dy \qquad \left|\begin{array}{l} x=y+i\pi\\ dx=dy\end{array}\right.$$

$$=(-1)^i\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}y}{y+i\pi}\,dy$$ $\Rightarrow$ los a_i tienen signos alternos.

$$|a_i|=\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}y}{y+i\pi}\,dy\le\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}y}{y+iy}\,dy=\frac{1}{i+1}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}y}{y}\,dy$$

$$|a_i|=\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}y}{y+i\pi}\,dy\ge\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}y}{y+(i+1)\pi}\,dy}_{|a_{i+1}|}\ge\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}y}{\pi+(i+1)\pi}\,dy=\frac{2}{(i+2)\pi}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2/\pi}{i+2} \le |a_{i+1}| \le |a_i| \le \frac{c}{i+1},$$

donde $c = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy$

Por el Criterio de Convergencia de Leibniz $\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ converge condicionalmente, pero no absolutamente

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \sum_{i=0}^{\infty} a_i < \infty$$

Pero $\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| = \infty \Rightarrow |f| \notin L^1(0,\infty).$