Corolario 1: Sean $u, v \in \mathcal{M}_{\bar{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$ tales que $u = v$ μ-c.t.p.
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida.

i) $u, v \geq 0 \Rightarrow \int u \, d\mu = \int v \, d\mu$.

ii) $u \in L^1(\mu) \Rightarrow v \in L^1(\mu)$ y $\int u \, d\mu = \int v \, d\mu$.

Prueba: (i) Como u, v son mesurables, el conjunto

$$N = \{x \in X : u(x) \neq v(x)\}$$

u=v c.t.p.

es mesurable $\left(N = (u-v)^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}) = (u-v)^{-1}(0)^c \right)$ y $\mu(N) = 0$.

$$\int u \, d\mu = \int_X u \, d\mu = \cancelto{0}{\int_N u \, d\mu} + \int_{N^c} u \, d\mu = \int_{N^c} u \, d\mu$$

$$= \int_{N^c} v \, d\mu = \cancelto{0}{\int_N v \, d\mu} + \int_{N^c} v \, d\mu = \int_X v \, d\mu = \int v \, d\mu.$$

(ii) Como $u=v$ c.t.p. $\Rightarrow$ $u^+=v^+$ c.t.p. y $u^-=v^-$ c.t.p.

$\{u^+\neq v^+\}, \{u^-\neq v^-\} \subseteq \{u\neq v\} \subseteq A, \ \mu(A)=0$

Supongamos $u\in L^1(\mu)$ $\Rightarrow$ $\int u^+ d\mu < \infty$ y $\int u^- d\mu < \infty$.

Por (i)
$$\left.\begin{array}{l} u^+=v^+ \text{ c.t.p.} \Rightarrow \int v^+ d\mu = \int u^+ d\mu < \infty \\ u^-=v^- \text{ c.t.p.} \Rightarrow \int v^- d\mu = \int u^- d\mu < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow v\in L^1(\mu).$$

y
$$\int u\, d\mu = \int (u^+-u^-)d\mu = \int u^+ d\mu - \int u^- d\mu$$
$$= \int v^+ d\mu - \int v^- d\mu = \int (v^+-v^-)\, d\mu = \int v\, d\mu.$$

$\square$

Corolario 2: Si $u\in \mathcal{M}_{\bar{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$ y $v\in L^1(\mu)$, $v\geq 0$, entonces

$|u|\leq v$, μ-c.t.p. $\Rightarrow$ $u\in L^1(\mu)$.

<u>Prueba:</u> $u^+, u^- \leq |u| \leq v$ μ- c.t.p. $\qquad |u| = u^+ + u^-$

$\Rightarrow \int u^+ d\mu \leq \int v \, d\mu < \infty$ y $\int u^- d\mu \leq \int v \, d\mu < \infty$ $\quad v \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

$\Rightarrow u \in \mathcal{L}^1(\mu)$. $\square$

<u>Corolario 3</u>: Si $u \in \mathcal{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$, entonces u es $\mathbb{R}$-valuada μ-c.t.p.

$\left(\{ x \in X : u(x) = +\infty \text{ ó } -\infty \} \subseteq A, \ \mu(A) = 0 \right)$. Además,

existe una función $\tilde{u} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{u} = u$ μ-c.t.p.

y $\int u \, d\mu = \int \tilde{u} \, d\mu$.

<u>Prueba:</u> Definimos $N = \{ |u| = +\infty \} = \{ u = +\infty \} \cup \{ u = -\infty \}$

$N \in \mathcal{A}$ ya que $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Vamos a mostrar que $\mu(N)=0$. Para ello, observe que

$$N = \bigcap_{n\geq 1} \{|u| \geq n\} = \{|u|=\infty\}.$$ y de la desigualdad

de Markov

$$\mu(N) = \mu\left(\lim_{n\to\infty} \{|u|\geq n\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\{|u|\geq n\}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \underbrace{\cancelto{c}{\int |u|\,d\mu}}_{<\infty} = 0.$$

$\Rightarrow \mu(N)=0.$

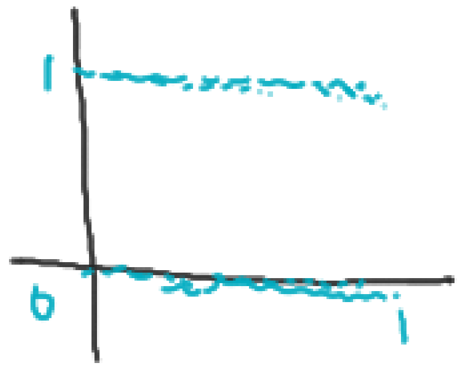
Definimos $\tilde{u}: X \to \mathbb{R}$ por $\tilde{u} = u \cdot \mathbb{1}_{N^c} = u \cdot \mathbb{1}_{\{|u|\in\mathbb{R}\}} = \begin{cases} u, & |u|\in\mathbb{R} \\ 0, & |u|=\infty \end{cases}$

Como $\mu(N)=0 \Rightarrow \tilde{u}=u$ μ-c.t.p. y $\int u\,d\mu = \int \tilde{u}\,d\mu$. $\square$

Ejemplo: (Integral de Riemann vs. Integral de Lebesgue)

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f=\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$

$$f(x)=\begin{cases}1; & x\in\mathbb{Q},\\ 0; & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$



f no es Riemann integrable

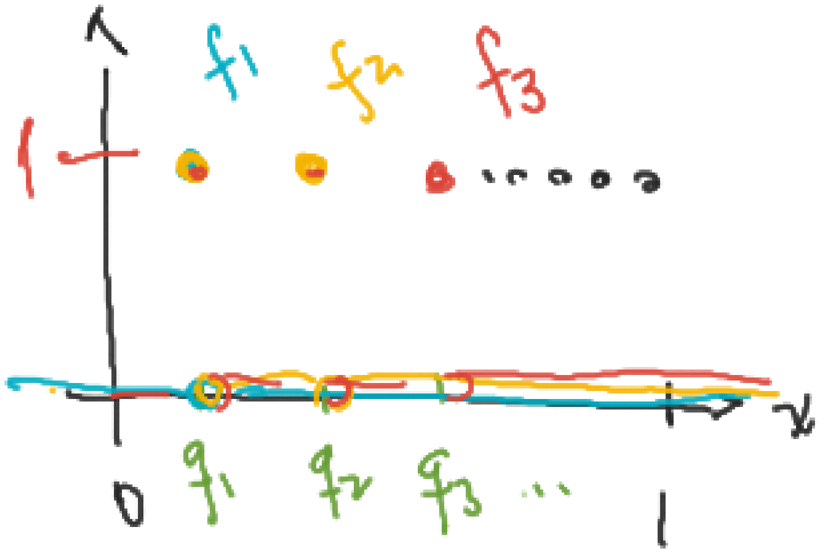
$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx=\int_0^1 0\,dx=0, \qquad \overline{\int_0^1} f(x)\,dx=\int_0^1 dx=1.$$

Usamos ahora la integral de Lebesgue:

Tome $\mathbb{Q}=\{q_n : n\in\mathbb{N}\}=\{q_1,q_2,\dots\}$ una enumeración de los racionales

Consideramos la secuencia de funciones $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ dadas por

$$f_n=\mathbb{1}_{\{q_1,q_2,\dots,q_n\}\cap[0,1]} \qquad n\in\mathbb{N}.$$



Observe que $\{f_n\}$ es creciente y

$f_n = 0$ c.t.p. $\quad f_n \nearrow \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = f$.

Además, $f_n \in \mathcal{M}^+_{\mathbb{R}}(\lambda')$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por Beppo Levi, $f \in \mathcal{M}^+(\lambda')$

y
$$\int_{[0,1]} f \, d\lambda' = \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n \, d\lambda' = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\lambda'$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} 0 \, d\lambda' = \lim_{n\to\infty} \cancel{\int_0^1 0 \, dx}$$

$$= 0. \qquad \square$$

$f_n = 0$ c.t.p.

$\int f_n = \int 0$

$\lambda'(\mathbb{Q}) = 0$.

Teoremas de Convergencia:

Teorema: (Teorema de Convergencia Monótona). Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida

(i) Sea $\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ una seq. creciente de funciones integrables $u_1 \leq u_2 \leq \dots$ con límite $u = \sup_n u_n$. Entonces $u \in L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu) \iff \sup \int u_n \, d\mu < \infty$

y en ese caso
$$\int u \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} u_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int u_n \, d\mu < \infty.$$

(ii) Sea $\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ una seq. decreciente de funciones integrables $u_1 \geq u_2 \geq \dots$ con límite $u = \inf_n u_n$. Entonces $u \in L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu) \iff \inf_n \int u_n \, d\mu > -\infty$

y en ese caso
$$\int u \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} u_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int u_n \, d\mu > -\infty.$$

Prueba: (i) $\Rightarrow$ (ii) tomando $-u_n$. Basta mostrar (i).

Como $u_n \in L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$, y $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots$, entonces las funciones $u_n - u_1 \geq 0$ definen una secuencia creciente de funciones integrables (mesurables) en $\mathcal{M}^+_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$

$$0 = u_1 - u_1 \leq u_2 - u_1 \leq u_3 - u_1 \leq \dots$$

Por Beppo Levi, en el límite $\lim_{n\to\infty}(u_n - u_1) = u - u_1 \in \mathcal{M}^+(\mu)$ y

$$0 \leq \sup_n \int (u_n - u_1)\,d\mu = \int (u - u_1)\,d\mu.$$

Luego,

$$\sup_n \int u_n\,d\mu = \sup_n \int [(u_n - u_1) + u_1]\,d\mu = \sup_n \left[\int (u_n - u_1)\,d\mu + \int u_1\,d\mu \right]$$

$$= \sup_n \int (u_n - u_1)\,d\mu + \int u_1\,d\mu = \int (u - \cancel{u_1})\,d\mu + \cancel{\int u_1\,d\mu}$$

$$= \int u\,d\mu = \int \sup_n u_n\,d\mu. \qquad \square$$

$(\Rightarrow)$ $u \in L^1(\mu)$ de la eq. anterior

$$\sup_n \int u_n \, d\mu = \int u \, d\mu < \infty \Rightarrow \sup_n \int u_n \, d\mu < \infty.$$

$(\Leftarrow)$ Si $\sup_n \int u_n \, d\mu < \infty$, entonces de $u_n = (u_n - u_1) + u_1$,

$$\int u \, d\mu = \int \lim u_n \, d\mu = \int \lim_{n \to \infty} \left[(u_n - u_1) + u_1 \right] d\mu$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\underbrace{\int (u_n - u_1) \, d\mu}_{< \infty} + \underbrace{\int u_1 \, d\mu}_{< \infty} \right)$$

$$= \sup_n \left(\underbrace{\int u_n \, d\mu}_{< \infty} - \cancel{\int u_1 \, d\mu} + \cancel{\int u_1 \, d\mu} \right) < \infty. \quad \square$$