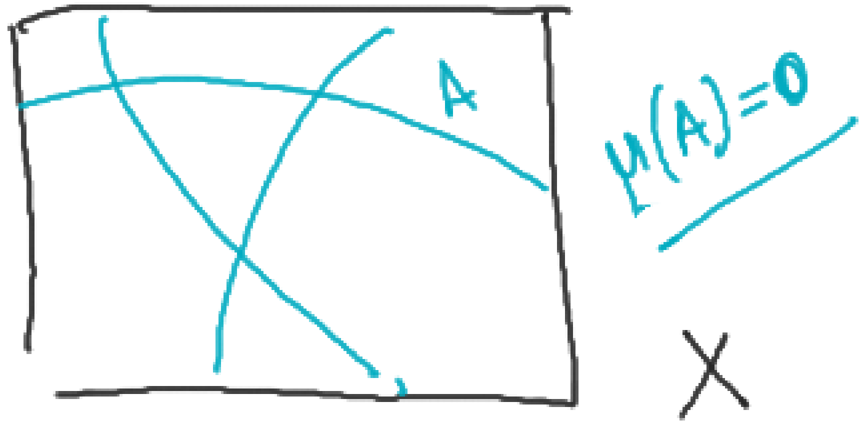
Conjuntos de medida nula:

Def: Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ espacio de medida. Un conjunto de *medida nula* (nullset, μ-nullset) es un conjunto mesurable $A\in\mathcal{A}$ con $\mu(A)=0$.

$$N_\mu = \{ A\in\mathcal{A} : A \text{ es de medida nula} \}.$$

Si una propiedad $\Pi(x)$ vale para todo $x\in X$, excepto para aquellos x contenidos en algún conjunto de medida nula $A\in\mathcal{A}$, entonces decimos que $\Pi(x)$ vale *casi en todo punto*. ó *casi en todos puntos*.



$\mu(X)=M$.

Notación: c.t.p. ó μ-c.t.p.

(almost everywhere a.e. ó μ-a.e.).

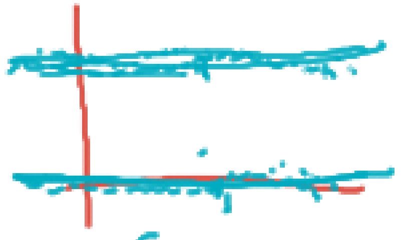
$$\Pi(x) \ \mu\text{-c.t.p.} \Rightarrow \underbrace{\{x \in X : \Pi(x) \text{ es falso}\}}_{\text{puede no ser mesurable}} \subseteq A \in \mathcal{A} \ \text{y} \ \mu(A) = 0.$$

Obs! (Cuidado, c.t.p. es un concepto engañoso). $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

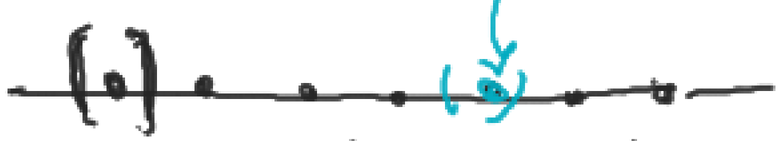
Ej: a) u es continua μ-c.t.p.

b) $u = v$ μ-c.t.p, con v continua.

$u = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$



$v = 0$



$\mathbb{Q} = \lim_{\varepsilon \to 0} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q-\varepsilon, q+\varepsilon)$ $\quad 2\varepsilon$

$\underline{\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = 0}$ μ-c.t.p. $\quad (\mu = \lambda^1$ lebesgue$)$

$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 0(x), \ \forall x \notin \mathbb{Q}$

$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \neq 0(x), \ \forall x \in \mathbb{Q}$, y $\mu(\mathbb{Q}) = 0$.

Prop: $(X,\mathcal{A},\mu)$ espacio de medida, $u \in \mathcal{M}^{+}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$. Entonces

i) $\int |u| \, d\mu = 0 \iff |u| = 0$ μ-c.t.p. $\iff \mu\{u \neq 0\} = 0$.

ii) $\mathbb{1}_A u \in L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$, para todo $A \in \mathcal{N}_\mu$ y $\int_A u \, d\mu = 0$.

Def: $\int_A u \, d\mu = \int_X \mathbb{1}_A \cdot u \, d\mu$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

$= \int \mathbb{1}_A \cdot u \, d\mu$.

Prueba: (ii) $\min\{|u|, n\} \xrightarrow[n\to\infty]{\nearrow} |u|$. Por Beppo Levi, $|u| \in \mathcal{M}^{+}_{\overline{\mathbb{R}}}$

y Para todo conjunto $A \in \mathcal{N}_\mu$

$$\int \mathbb{1}_A |u| \, d\mu = \int \mathbb{1}_A \cdot \sup_n \min\{|u|, n\} \, d\mu = \int \sup_n \mathbb{1}_A \min\{|u|, n\} \, d\mu$$

$$= \sup_n \int \mathbb{1}_A \min\{|u|, n\} \, d\mu \leq \sup_n \int \mathbb{1}_A n \, d\mu$$

$$\leq \sup_n n \cdot \int \mathbb{1}_A \, d\mu = \sup_n n \cdot \cancel{\mu(A)} = \sup_n n \cdot 0 = 0.$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \int \mathbb{1}_A |u|\, d\mu \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \int \mathbb{1}_A |u|\, d\mu = 0.$$

Además

$$\left| \int \mathbb{1}_A u \, d\mu \right| \leq \int |\mathbb{1}_A u|\, d\mu = \int \mathbb{1}_A |u|\, d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \mathbb{1}_A u\, d\mu}_{\displaystyle \overset{\parallel}{\int_A u\, d\mu}} = 0, \quad \forall A \in \mathcal{N}_\mu.$$

i) $\int |u|\, d\mu = 0 \iff |u| = 0$ c.t.p. $\iff \mu\{u \neq 0\} = 0.$

Para la segunda equivalencia, es inmediata de la definición de μ-c.t.p.: $|u| = 0$ μ-c.t.p. $\iff \mu\{u \neq 0\} = 0.$

$|u| = 0$ c.t.p. $\Rightarrow \{u \neq 0\} \subseteq A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0.$

$$0 \leq \mu(\{u \neq 0\}) \leq \mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu\{u \neq 0\} = 0.$$

En la primera implicación

$(\Leftarrow)$ Como $|u|=0$ c.t.p. $\Rightarrow$ $A=\{u\neq 0\}\in\mathcal{A}$ y $\mu(A)=0$.

Entonces
$$\int |u|\,d\mu = \int_X |u|\,d\mu = \int_{A\cup A^c} |u|\,d\mu$$
$$= \int_{A^c} |u|\,d\mu + \int_A |u|\,d\mu = \int_{\{u=0\}} |u|\,d\mu + \int_A |u|\,d\mu$$
$$= \cancelto{0}{\int_{\{|u|=0\}} 0\,d\mu} + \cancelto{0}{\int_A |u|\,d\mu} \quad \text{(por ii)}$$
$$= 0.$$

$(\Rightarrow)$ Suponga ahora que $\int |u|\,d\mu = 0$. Usamos la desigualdad de Markov: para $A\in\mathcal{A}$ y $c>0$, vale

$$\mu(\{|u|\geq c\}\cap A) = \int \mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}\cap A}\,d\mu = \int \mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}}\cdot \mathbb{1}_A\,d\mu$$

$$\mu(\{|u|\geq c\}\cap A) = \int \frac{c}{c} \mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}} \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu$$

$$= \int_A \frac{c}{c} \mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}} \, d\mu \leq \int \frac{|u(x)|}{c} \mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}}(x) \, \mu(dx)$$

$$\leq \frac{1}{c} \int_A |u(x)| \mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}}(x) \, \mu(dx).$$

$$\forall x$$

$$c \mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}}(x) \leq |u(x)| \mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}}(x)$$

Tomamos $A = X$, y obtenemos

$$\mu\{|u|\geq c\} \leq \frac{1}{c} \int |u| \mathbb{1}_{\{|u|\geq c\}} \, d\mu \leq \frac{1}{c} \int |u| \, d\mu$$

$$\mu\{|u|>0\} = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{|u|\geq \tfrac{1}{n}\}\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\{|u|\geq \tfrac{1}{n}\}$$

$$\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(n \cdot \underbrace{\int |u| \, d\mu}_{=0}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0.$$

$\Rightarrow |u| = 0$ c.t.p. $\square$

<u>Teorema:</u> (Desigualdad de Markov).

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Para todo $A \in \mathcal{A}$, $\forall c > 0$, vale

$$\mu\left(\{|u| \geq c\} \cap A\right) \leq \frac{1}{c} \int_A |u| \, d\mu .$$

$\square$

<u>Obs:</u> Cuando $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. tenemos

$$\mathbb{P}\left(\{|X| \geq c\} \cap A\right) \leq \frac{1}{c} \int_A |X| \, d\mathbb{P}$$

Tomando $A = \Omega$, $X \geq 0$.

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq c) \leq \frac{1}{c} \int_\Omega X \, d\mathbb{P}}$$