Integral de Lebesgue para funciones mesurables:

Extendemos la integral de Lebesgue en $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ a $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Aquí $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es espacio de medida.

$$u \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A}) \Rightarrow u = \underbrace{u^+}_{=\max(u,0)} - \underbrace{u^-}_{=\max(-u,0) = -\min(u,0)} \in \mathcal{M}^+_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$$

Def: La función $u: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se llama μ-integrable si u es mesurable y $\int u^+ d\mu, \int u^- d\mu < \infty$. En este caso, definimos la integral de Lebesgue de u respecto de μ por

$$\int u \, d\mu = \int u^+ d\mu - \int u^- d\mu \in [-\infty, \infty].$$

Notación: $L^1(\mu)$ ó $L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ denota el conjunto de todas las funciones μ-integrables, $u: X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Obs: • $\int u\, d\mu$ está bien definida

Suponga $u = f_1 - g_1 = f_2 - g_2$, donde $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{M}^+_{\bar{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$.

$$u = f_1 - g_1 = f_2 - g_2 \Rightarrow f_1 + g_2 = f_2 + g_1, \quad y \quad f_1 + g_2,\ f_2 + g_1 \in \mathcal{M}^+_{\bar{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$$

$$\Rightarrow \int f_1\, d\mu + \int g_2\, d\mu = \int (f_1 + g_2)\, d\mu = \int (f_2 + g_1)\, d\mu = \int f_2\, d\mu + \int g_1\, d\mu$$

$$\Rightarrow \int f_1\, d\mu - \int g_1\, d\mu = \int f_2\, d\mu - \int g_2\, d\mu.$$

$\Rightarrow \int u\, d\mu$ independe de la descomposición de u.

• $\int u\, d\lambda^n$ se llama la integral de Lebesgue n-dimensional

Cuando $u \in L^1_{\bar{\mathbb{R}}}(\lambda^n)$, decimos que u es Lebesgue-integrable.

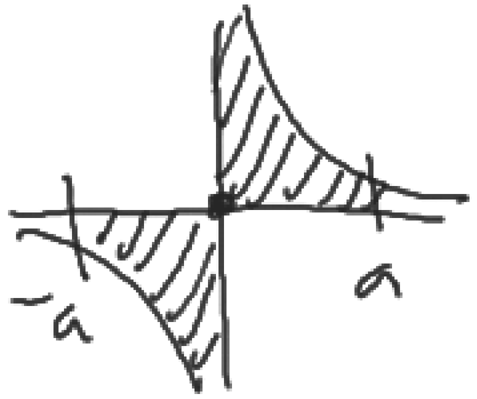
usualmente escribimos $\int u\, d\lambda^n = \int u\, dx = \int u(x)\, dx$.

- Algunos autores define $u: X \to \overline{\mathbb{R}}$ como μ-integrable si u es mesurable y si $\int u^+ d\mu - \int u^- d\mu$ hace sentido (no es "$\infty - \infty$").

$$\int u \, d\mu = \begin{cases} \underbrace{\int u^+ d\mu}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\int u^- d\mu}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R} \\ \underbrace{\int u^+ d\mu}_{+\infty} - \underbrace{\int u^- d\mu}_{\in \mathbb{R}} = +\infty \\ \underbrace{\int u^+ d\mu}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\int u^- d\mu}_{+\infty} = -\infty \end{cases}$$

$$\int_{-a}^{a} \frac{1}{x}\,dx = 0$$

$$\overset{u}{\int_{-a}^{a} \frac{1}{x}\,dx} = \underbrace{\lim_{t\to 0^-} \overset{u^+}{\int_{-a}^{t} \frac{1}{x}\,dx}}_{-\infty} + \underbrace{\lim_{t\to 0^+} \overset{u^-}{\int_{t}^{a} \frac{1}{x}\,dx}}_{+\infty}$$



?

Importante!

Propiedad: Sea $u \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$. Las siguientes son equivalentes.

i) $u \in \mathcal{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$,

ii) $u^+, u^- \in \mathcal{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$, (exceptuando el caso "$\infty - \infty$")

iii) $|u| \in \mathcal{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$.

iv) existe $w \in \mathcal{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$, con $w \geq 0$ y tal que $|u| \leq w$.

Prueba: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) def. de integral de Lebesgue

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Como $|u| = u^+ + u^- \Rightarrow$

$$\int |u| \, d\mu = \int (u^+ + u^-) \, d\mu = \int u^+ d\mu + \int u^- d\mu < \infty$$

$\Rightarrow |u| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A})$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Basta tomar $w = |u| \in \mathcal{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$ y $|u| \leq w$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) Como $u^+, u^- \leq |u| \leq w \in \mathcal{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$. Por monotonicidad

$\Rightarrow \int u^+ d\mu, \int u^- d\mu \leq \int w \, d\mu < \infty \Rightarrow u^+, u^- \in \mathcal{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$. $\square$

$$L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu) = \left\{ u : X \to \overline{\mathbb{R}} : \ u \text{ mesurable y } \int |u| \, d\mu < \infty \right\}.$$

$$L^p_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu) = \left\{ u : X \to \overline{\mathbb{R}} : \ u \text{ mesurable y } \int |u|^p \, d\mu < \infty \right\}.$$

$p \geq 1$. espacios L^p

$$H^p_0(\mu) = \left\{ u : X \to \overline{\mathbb{R}}, \ u \text{ mesurable}, \ \int |u| \, d\mu < \infty, \ \int |u'| \, d\mu < \infty \right\}$$

espacios de Sobolev.

<u>Teorema:</u> (Propiedades de la Integral). Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. $u, v \in L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

i) $\alpha u \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ y $\int \alpha u \, d\mu = \alpha \int u \, d\mu$. (homogeneidad)

ii) $u + v \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ y $\int (u+v) \, d\mu = \int u \, d\mu + \int v \, d\mu$. (linealidad).

iii) $\min\{u, v\} = u \wedge v$, $\max\{u, v\} = u \vee v \in L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$.

$$\int (u \wedge v)\, d\mu \leq \left(\int u\, d\mu\right) \wedge \left(\int v\, d\mu\right)$$

$$\left(\int u\, d\mu\right) \vee \left(\int v\, d\mu\right) \leq \int (u \vee v)\, d\mu .$$

iv) $u \leq v \Rightarrow \int u\, d\mu \leq \int v\, d\mu$. (monotonicidad)

v) $|u| \in L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ y $\left| \int u\, d\mu \right| \leq \int |u|\, d\mu$. $\square$

Obs! • Excluyendo el caso "$\infty - \infty$", la integral es lineal

$$\int (\alpha u + \beta v)\, d\mu = \alpha \int u\, d\mu + \beta \int v\, d\mu .$$

• (i) y (ii) $\Rightarrow$ $L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y

$$\begin{aligned} \int \cdot \, d\mu : L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \int u\, d\mu . \end{aligned}$$

es un funcional lineal.

Ejemplos: 1. $(X, \mathcal{A}, \delta_y)$. $y \in X$ fijo. $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Recordemos $\int u(x)\, \delta_y(dx) = u(y)$.

¿Cuáles son las funciones δ_y- integrables?

$$u \in L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\delta_y) \iff u \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A}) \text{ y } \int u(x)\, \delta_y < \infty$$

$$\iff u \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A}) \text{ y } u(y) < \infty.$$

2. Tome $\left(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_n\right)$. Como $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$\alpha_n \in \mathbb{R}$

toda función $u : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ es mesurable.

$$\int |u|\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |u|\, \alpha_n \delta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |u(n)|.$$

$$u \in L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu) \iff \sum_{n \geq 1} \alpha_n |u(n)| < +\infty$$

Cuando $\alpha_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, Tenemos $\qquad u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$u \in L^1(\mu) \iff \sum_{n \geq 1} |u(n)| < \infty .$$

$$\int |u(x)| \, d\mu(x) < \infty$$

El espacio $L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ se llama el espacio de secuencias sumables y se denota $\ell^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathbb{R})$.

$$L^p(\mu) = \{ u: X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ mesurable y } \int |u|^p d\mu < \infty \}$$

$$\ell^p(\mathbb{R}) = \{ u: \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}, \sum_{n \geq 1} |u(n)|^p < \infty \}$$

$$\mu = \sum_{n \geq 1} \delta_n$$