Teorema: (Beppo Levi).

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, Para una secuencia creciente $\{u_n\} \subseteq \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$

con $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \dots$ se tiene que $u = \sup_n u_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ y

$$\int \sup_n u_n \, d\mu = \int u \, d\mu = \sup_n \int u_n \, d\mu.$$

$$\left( \int \lim_{n\to\infty} u_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int u_n \, d\mu \right).$$

Prueba: Ya vimos que si $u_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A}) \implies u = \sup_n u_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$.

- Afirmamos que si $u, v \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, con $u \leq v$ entonces $\int u \, d\mu \leq \int v \, d\mu$.

Si $u \leq v$ entonces para toda función simple $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ con $f \leq u$, También satisface $f \leq v$.

$$\Rightarrow \{ I_\mu(g) : g \leq u, g \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}) \} \subseteq \{ I_\mu(g) : g \leq v, g \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}) \}$$

$$\Rightarrow \int u \, d\mu = \sup \{ I_\mu(g) : g \leq u, g \in \mathcal{E}^+ \} \leq \sup \{ I_\mu(g) : g \leq v, g \in \mathcal{E}^+ \} = \int v \, d\mu$$

- Afirmamos que $\sup_n \int u_n \, d\mu \le \int \underbrace{(\sup_n u_n)}_{u} \, d\mu$.

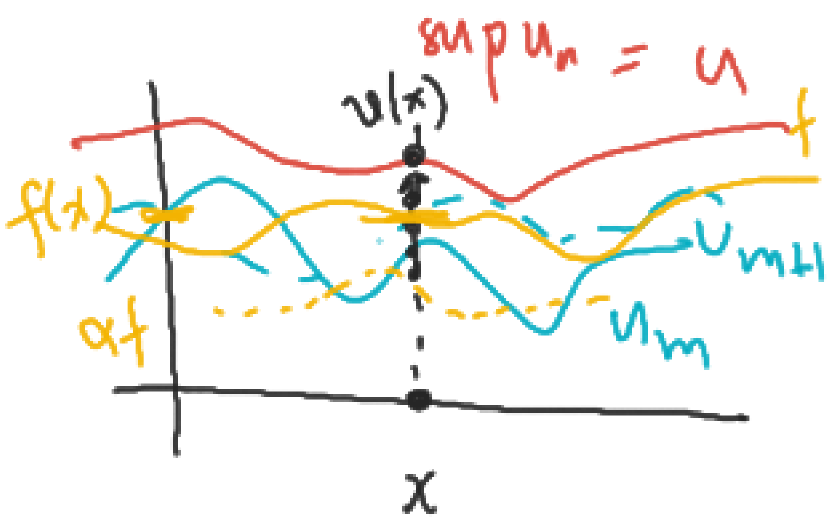
Para toda $m \in \mathbb{N}$, tenemos $u_m \le \sup_n u_n = u$. Por monotonía

$$\Rightarrow \int u_m \, d\mu \le \int (\sup_n u_n) \, d\mu = \int u \, d\mu, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \sup_n \int u_n \, d\mu \le \int (\sup_n u_n) \, d\mu.$$

- Afirmamos que si $\boxed{f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}),}$ con $\boxed{f \le u}$ $\Rightarrow I_\mu(f) \le \sup_n \int u_n \, d\mu$

Tomamos $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$, con $f \le u$. Sea $\alpha \in (0,1)$. Entonces




$$u = \sup_n u_n \Rightarrow \forall x \in X \ \exists\, N = N(x,\alpha) \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$\alpha f(x) \le u_n(x), \quad \forall n \ge N.$$

$\alpha f \le u_n$

$\alpha f \mathbb{1}_{B_n} \le u_n \mathbb{1}_{B_n}$

$$\Rightarrow B_n = \{x \in X : \alpha f(x) \le u_n(x)\} \ \underset{n\to\infty}{\nearrow} \ X$$

$$\Rightarrow \alpha \mathbb{1}_{B_n} f \le \mathbb{1}_{B_n} u_n.$$

Entonces, para toda función simple $f = \sum_{i=1}^{r} y_i \mathbb{1}_{A_i} \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, se tiene

$$\alpha f \mathbb{1}_{B_n} \leq u_n \mathbb{1}_{B_n} \leq u_n$$

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{i=1}^{r} y_i \mu(A_i \cap B_n) &= I_\mu(\alpha \cdot f \cdot \mathbb{1}_{B_n}) \\ &\leq I_\mu(u_n \mathbb{1}_{B_n}) \\ &\leq I_\mu(u_n) = \int u_n \, d\mu \leq \sup_n \int u_n \, d\mu. \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha f \cdot \mathbb{1}_{B_n} \\ \sum \alpha y_i \mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_{B_n} \\ \sum \alpha y_i \mathbb{1}_{A_i \cap B_n} \end{array} \right.$$

Como esto vale $\forall B_n$ y $B_n \nearrow X$, tomando $\lim_{n\to\infty}$, tenemos

$$I_\mu(\alpha f \cdot \mathbb{1}_X) = I_\mu(\alpha f) \leq \sup_n \int u_n \, d\mu.$$

Como esto vale $\forall \alpha \in (0,1)$, tomando $\lim_{\alpha \to 1}$

$$I_\mu(f) \leq \sup_n \int u_n \, d\mu.$$

Finalmente, en el estimado anterior podemos tomar el supremo sobre todas las $f \in \mathcal{E}^+(A)$ tales que

$$\int u\, d\mu = \sup\{ I_\mu(f) : f \in \mathcal{E}^+(A),\ f \leq u \} \leq \sup_n \int u_n\, d\mu .$$

$$\Rightarrow \boxed{\int (\sup_n u_n)\, d\mu \leq \sup_n \int u_n\, d\mu .}$$

Por otro lado, de la monotonía de $\int d\mu$, tenemos $u_n \leq \sup_n u_n = u$, $\forall n$

$$\Rightarrow \int u_n\, d\mu \leq \int (\sup_n u_n)\, d\mu , \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \boxed{\sup_n \int u_n\, d\mu \leq \int (\sup_n u_n)\, d\mu .}$$

$\square$.

<u>Corolario:</u> Sea $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Entonces, para cualquier secuencia creciente $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, con $f_n \nearrow u$, vale

$$\int u \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

<u>Prueba:</u> $\int u \, d\mu = \int \sup_n f_n \, d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$ $\square$

<u>Propiedades:</u> (de la integral): Sean $u, v \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Entonces

i) $\int \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$

$I_{\gamma}$

ii) $\int \alpha u \, d\mu = \alpha \int u \, d\mu, \quad \forall \alpha > 0.$ (homogeneidad positiva)

iii) $\int (u+v) \, d\mu = \int u \, d\mu + \int v \, d\mu.$ (aditividad)

iv) $u \leq v \Rightarrow \int u \, d\mu \leq \int v \, d\mu.$ (monotonía)

Prueba: (i) ya fue probado en las prop. de $I_\mu$.

(ii) y (iii) se deducen de las propiedades análogas de $I_\mu$.

(iv) ya fue probado en el Teorema de Beppo Leví. $\square$

Ejemplos: 1. $\mu = \delta_y$ para $y \in X$. Para $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$.

¿Cómo se calcula la integral $\int u \, d\mu = \int u \, d\delta_y$ ?

- Para $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$, $f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i}$ $X = \dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i$, $A_i \in \mathcal{A}$.

Como $y \in X = \dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i$ $\Rightarrow$ $y$ pertenece exactamente a uno de los $A_i$

digamos $y \in A_{i_0}$.

$$\Rightarrow \quad f(y) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i}(y) = c_{i_0} \underbrace{\mathbb{1}_{A_{i_0}}(y)}_{=1} = c_{i_0}.$$

$$\int f\, d\delta_y = I_{\delta_y}(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \delta_y(A_i) = c_{i_0}\, \cancel{\delta_y(A_{i_0})} = c_{i_0}$$

$$= f(y).$$

Tomemos ahora $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Por el Lema del Sombrero, $\exists \{f_n\} \subseteq \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ con $f_n \nearrow u$

Por Beppo Levi, $$\int u\, d\delta_y = \int (\sup_n f_n)\, d\delta_y = \sup_n \underbrace{\int f_n\, d\delta_y}_{f_n(y)}$$
$$= \sup_n f_n(y)$$
$$= u(y)$$

Portanto $\int u\, d\delta_y = u(y)$. $\square$

Cerramos el capítulo con otro teorema de convergencia.

| "Lema más importante de todo el análisis"

**Teorema:** (Lema de Fatou).

Sea $\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}^+(A)$, una sec. de funciones mesurables positivas.

Entonces, $u = \liminf_{n\to\infty} u_n \in \mathcal{M}^+(A)$ y

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} u_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int u_n \, d\mu.$$

**Prueba:** Como $\liminf u_n = \sup_k \inf_{n\geq k} u_n$ es mesurable. $\in \mathcal{M}^+(A)$

$$\left( u_n \in \mathcal{M}^+(A) \Rightarrow \inf_{n\geq k} u_n \in \mathcal{M}^+(A) \Rightarrow \sup\left(\inf u_n\right) \in \mathcal{M}^+(A) \right)$$

Además, $\{\inf_{n\geq k} u_n\}_{k\geq 1}$ es una secuencia creciente, y

$$\inf_{n\geq k} u_n \nearrow \liminf_{n\to\infty} u_n$$

Aplicando Beppo Levi a $\{\inf_{n\geq k} u_n\}_{k\geq 1}$, tenemos

$$\int (\liminf_{n\to\infty} u_n)\, d\mu = \int \left(\sup_k \{\inf_{n\geq k} u_n\}_k\right) d\mu$$

$$= \sup_k \int \left(\inf_{n\geq k} u_n\right) d\mu \qquad \text{Beppo Levi}$$

$$\leq \sup_k \left(\inf_{n\geq k} \int u_n\, d\mu\right) = \liminf_{n\to\infty} \int u_n\, d\mu \qquad \square$$

$$\inf_{n\geq k} u_n \leq u_n \quad \forall n\geq k \Rightarrow \int \inf u_n \leq \int u_n \quad \forall n\geq k \Rightarrow \int \inf u_n \leq \inf \int.$$