Integración:

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Queremos medir el área bajo la curva de cualquier función $u: X \to \mathbb{R}$.

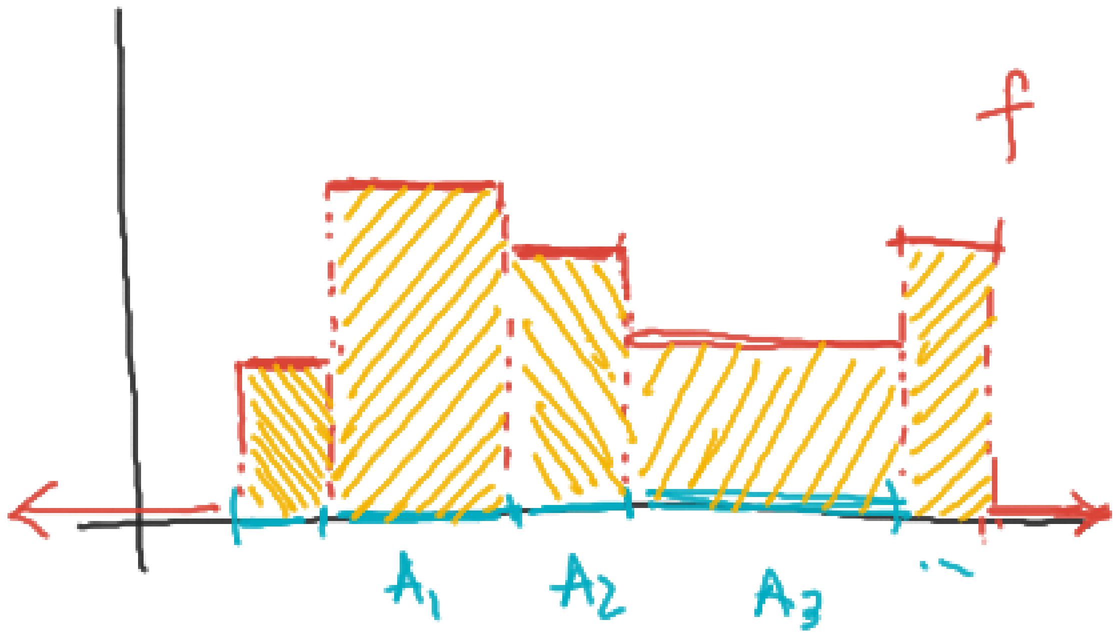
¿Cómo medimos áreas bajo funciones simples positivas?

Sea $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i}$ una función simple positiva $(f \geq 0)$ en su representación estándar. $f: X \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$$

$A_i \in \mathcal{A}$

$\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i = X$



$$\text{Área}(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i).$$

Def: Sea $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$. Definimos la integral de f respecto de μ ó la μ-integral de f es

$$I_\mu(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \mu(A_i) \in [0,\infty].$$

si $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i}$ (representación estándar).

Lema: Sean $\sum_{i=1}^{m} c_i \mathbb{1}_{A_i}$ y $\sum_{j=1}^{n} d_j \mathbb{1}_{B_j}$ dos representaciones estándar distintas para $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{m} c_i\, \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{n} d_j\, \mu(B_j)$$

Prueba: Como $X = \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} A_i = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} B_j$. $\Rightarrow$ $A_i = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} (A_i \cap B_j)$ $\forall i$

$$B_j = \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} (A_i \cap B_j), \ \forall j$$

Como μ es aditiva

$$\Rightarrow \quad \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j), \quad \mu(B_j) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) \qquad \forall i, \forall j.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} c_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_i \mu(A_i \cap B_j)$$

$$\shortparallel$$

$$y \quad \sum_{j=1}^{n} d_j \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{n} d_j \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_j \mu(A_i \cap B_j)$$

Pero $c_i = d_j$, siempre que $A_i \cap B_j = \phi$

$$\Rightarrow c_i \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} = d_j \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

$$\Rightarrow c_i \mu(A_i \cap B_j) = d_j \mu(A_i \cap B_j) \qquad \forall i, \forall j$$

Portanto, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{n} d_j \mu(B_j)$. $\square$

<u>Propiedades</u>: Sean $f, g \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$. Entonces

i) $I_\mu(\mathbb{1}_A) = \mu(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

ii) $I_\mu(\lambda f) = \lambda I_\mu(f)$, $\forall \lambda \geq 0$

iii) $I_\mu(f+g) = I_\mu(f) + I_\mu(g)$.

iv) Si $f \leq g \Rightarrow I_\mu(f) \leq I_\mu(g)$.

<u>Prueba</u>: (i) Se deriva directamente de la definición de f:

Si $f = \mathbb{1}_A \Rightarrow f$ tiene repr. estándar $f = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{A^c}$

$$\Rightarrow I_\mu(f) = 1 \cdot \mu(A) + \cancel{0 \cdot \mu(A^c)} = \mu(A).$$

(ii) $f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i} \Rightarrow \lambda f = \lambda \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^n \lambda c_i \mathbb{1}_{A_i}$, entonces

$$I_\mu(\lambda f) = \sum_{i=1}^n \lambda c_i \, \mu(A_i) = \lambda \sum_{i=1}^n c_i \, \mu(A_i) = \lambda I_\mu(f).$$

(iii) Si $f = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathbb{1}_{A_i}$ y $g = \sum_{j=1}^{n} d_j \mathbb{1}_{B_j}$ entonces $f+g = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (c_i+d_j)\mathbb{1}_{A_i\cap B_j}$

$$\Rightarrow I_\mu(f+g) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (c_i+d_j)\,\mu(A_i\cap B_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_i\,\mu(A_i\cap B_j) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_j\,\mu(A_i\cap B_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mu(A_i\cap B_j)}_{\mu(A_i)} + \sum_{j=1}^{n} d_j \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \mu(A_i\cap B_j)}_{\mu(B_j)}$$ aditividad de μ

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i\mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} d_j\,\mu(B_j) = I_\mu(f) + I_\mu(g).$$

(iv) Si $f \leq g \Rightarrow g = \underbrace{f}_{\in \mathcal{E}^+} + \underbrace{(g-f)}_{\in \mathcal{E}^+,\ \geq 0}$. Por el item (iii)

$$\Rightarrow I_\mu(g) = I_\mu\big(f+(g-f)\big) = I_\mu(f) + \underbrace{I_\mu(g-f)}_{\geq 0}$$

$$\geq I_\mu(f).$$

$\square$

$\{\boxed{f_n}\} \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ $\qquad$ $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$

$\boxed{f_n} \nearrow u$

$I_\mu(f_n) \nearrow \; ? \; I_\mu(u)$

?

$u = u^+ - u^-$

$v \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

$u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$

Lema Sombrero

$f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$

Def: Sea $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Definimos la <u>integral de u respecto de</u> μ como $(X, \mathcal{A}, \mu)$ esp. medida.

$$\int u \, d\mu = \sup \{ I_\mu(g) : g \leq u, \ g \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}) \}.$$

<u>Obs!</u>

- $\int u d\mu \in [0, \infty]$
- $\int u \, d\mu$. Cuando se quiere hacer explícita la variable de integración

$$\int u(x) \, \mu(dx) \quad \text{ó} \quad \int u(x) \, d\mu(x) \quad \text{ó} \quad \int \mu(dx) \, u(x).$$

Observamos primero que $\int u \, d\mu$ extiende a $I_\mu(f)$.

<u>Lema:</u> Para toda $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$, vale $\int f d\mu = I_\mu(f)$.

Prueba: Sea $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$. Como $f \leq f$, entonces f es una de las funciones simples en el conjunto $\{ g : g \leq f,\ g \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}) \}$

$$\Rightarrow \quad \int f \, d\mu = \sup \{ \underbrace{I_\mu(g) : g \leq f,\ g \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})}_{I_\mu(f)} \} \geq I_\mu(f).$$

Por otro lado, si $g \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ y $g \leq f$, por la monotonía de I_μ

$\Rightarrow I_\mu(g) \leq I_\mu(f)$, $\forall g \leq f$. Tomando el supremo

$$\int u \, d\mu = \sup \{ I_\mu(g) : g \leq f,\ g \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}) \} \leq I_\mu(f). \qquad \square$$

Teorema: (Teorema de Beppo Levi).

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Para una secuencia creciente de funciones mesurables positivas $\{u_n\} \subseteq \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, con

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \dots$

Entonces se tiene que $u = \sup_n u_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ y

$$\int \left(\sup_n u_n\right) d\mu = \int u \, d\mu = \sup_n \int u_n \, d\mu$$

o eq.

$$\int \left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) d\mu = \int u \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int u_n \, d\mu .$$

T. Beppo Levi sirve para dar una alternativa a la definición de la integral $\int u \, d\mu$.

- no es necesario bajar al supremo de funciones simples
- basta tomar $\{u_n\} \subseteq \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ con $u_n \nearrow u$.