Propiedades de funciones simples:

Notación: $(X, \mathcal{A})$ espacio medible.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{A}) = \{ f : X \to \overline{\mathbb{R}},\ f \text{ es función simple} \}$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \{ u : X \to \overline{\mathbb{R}},\ u \text{ es medible} \}$$

$$\mathcal{E}^+ = \mathcal{E}(\mathcal{A})^+ = \{ f \text{ simples no-negativas} \} \qquad \mathcal{E}^- = \mathcal{E}(\mathcal{A})^- = \{ f \text{ simples negativas} \}$$

$$\mathcal{M}^+ \qquad\qquad \mathcal{M}^-$$

Prop: $f, g \in \mathcal{E}(\mathcal{A}) \Rightarrow f \pm g,\ fg,\ cf \in \mathcal{E}(\mathcal{A}),\ c \in \mathbb{R}$.

Prueba:

$$f = \sum_{i=1}^{M} c_i \mathbb{1}_{A_i} \qquad A_i \in \mathcal{A} \text{ disjuntos}$$

$$g = \sum_{j=1}^{N} d_j \mathbb{1}_{B_j} \qquad B_j \in \mathcal{A} \text{ disjuntos}$$

$$\Rightarrow \quad f \pm g = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} (c_i \pm d_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}, \qquad fg = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} c_i d_j \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}, \qquad cf = \sum_{i=1}^{M} c c_i \mathbb{1}_{A_i} \qquad \square$$

<u>Prop</u>: $(X, \mathcal{A})$ esp. mesurable, $A_i, B_j \in \mathcal{A}$.

- $$(\mathbb{1}_{A_i} + \mathbb{1}_{B_j})(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1; & x \in A_i, x \notin B_j \\ 1; & x \in B_j, x \notin A_i \\ 2; & x \in A_i \cap B_j \\ 0; & \text{caso contrario} \end{array} \right\} = \left(\mathbb{1}_{A_i - B_j} + 2\, \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} + \mathbb{1}_{B_j - A_i} + 0 \cdot \mathbb{1}_{(A_i \cup B_j)^c} \right)(x)$$

- $(\mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathbb{1}_{B_j})(x) = \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}(x)$.

- $a \mathbb{1}_{A_i} + b \mathbb{1}_{B_j} = a \mathbb{1}_{A_i - B_j} + (a+b) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} + b \mathbb{1}_{B_j - A_i}$.

- $(a \mathbb{1}_{A_i})(b \mathbb{1}_{B_j}) = ab\, \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$.

<u>Obs!</u> $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

$\mathcal{E}(\mathcal{A})$ " " " " $\qquad \mathcal{E}(\mathcal{A})$ es subespacio de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

$\mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ (no es subespacio! faltan inversos aditivos).

Corolarios al Lema del Sombrero:

Corolario 1: Sea $(X,\mathcal{A})$ espacio mesurable. Si $\{u_n\}_{n\geq 1}$ son funciones mesurables, $u_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, entonces

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n, \quad \limsup_{n\to\infty} u_n \quad y \quad \liminf_{n\to\infty} u_n$$

son mesurables.

$$\limsup_{n\to\infty} u_n(x) = \inf_k \Big[\underline{\sup_{n\geq k}} u_n(x) \Big] = \lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{n\geq k} u_n(x) \Big)$$

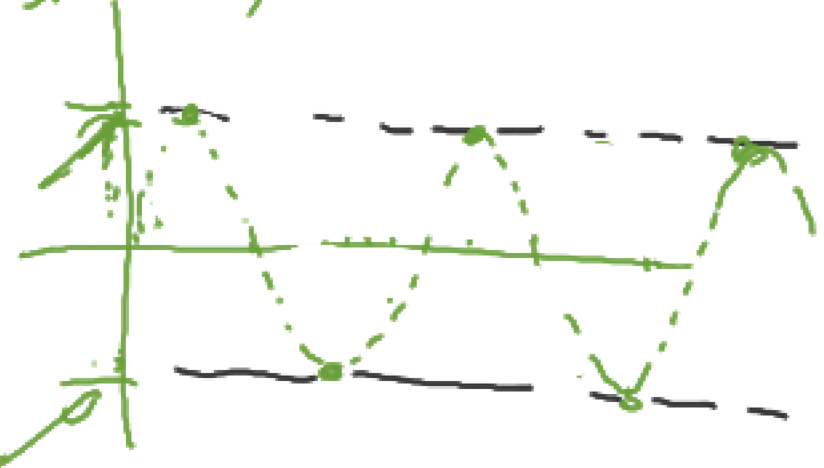
$$\liminf_{n\to\infty} u_n(x) = \sup_k \Big[\inf_{n\geq k} u_n(x) \Big] = \lim_{n\to\infty} \Big(\inf_{n\geq k} u_n(x) \Big)$$

$$\liminf_{n\to\infty} u_n(x) \leq \lim_{n\to\infty} u_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} u_n(x)$$

$\quad\;\, \|$

menor punto de acumulación

mayor punto de acumulación



Prueba: • $\underline{\sup u_n}$: Verificamos que $\{\sup u_n > a\}$ es mensurable, $\forall a \in \mathbb{R}$. $u_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$

Afirmamos que

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n > a\} = \{x \in X : \sup_{n\geq 1} u_n(x) > a\} = \bigcup_{n\geq 1}\{u_n > a\}.$$

$(\supseteq)$ $x \in \bigcup_{n\geq 1}\{u_n > a\} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \{u_n > a\} \Rightarrow u_n(x) > a$

$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) \geq u_n(x) > a \Rightarrow x \in \{\sup u_n > a\}$.

$(\subseteq)$ Si $x \in \{\sup u_n > a\} \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) > a$. Supongamos que $x \notin \bigcup_{n\geq 1}\{u_n > a\}$

$\Rightarrow \underline{u_n(x) \leq a}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sup_n u_n(x) \leq a$ $(\rightarrow\leftarrow)$ $\Rightarrow x \in \bigcup\{u_n > a\}$.

Como $\{\sup u_n > a\} = \bigcup_{n\geq 1} \underbrace{\{u_n > a\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$. $\Rightarrow \sup_{n\geq 1} u_n$ mensurable.

• $\underline{-u_n \in \mathcal{A}}$: $\{-u_n \geq a\} = \{u_n \leq -a\} \in \mathcal{A}, \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow -u_n$ mensurable.

ii) $\inf u_n = -\underbrace{\underbrace{\sup(\underbrace{-u_n}_{\in\mathcal{M}})}_{\in\mathcal{M}}}_{\in\mathcal{M}} \in \mathcal{M} \Rightarrow \inf u_n$ mesurable.

iii) $\limsup_{n\to\infty} u_n = \inf_k \left(\underbrace{\sup_{n\geq k} u_n}_{\in\mathcal{M}}\right) \in \mathcal{M} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} u_n$ mesurable

iv) $\liminf u_n = -\limsup_{n\to\infty}(-u_n) \in \mathcal{M}$. $\square$

<u>Corolario 2</u>: $(X,\mathcal{A})$ esp. mesurable. $u,v: X\to\overline{\mathbb{R}}$ funciones mesurable.

Entonces $u\pm v$, uv, $\max\{u,v\}=u\vee v$ y $\min\{u,v\}=u\wedge v$.

son mesurables. $\square$

$u\pm v$, uv $\quad u\vee v=\frac{1}{2}(u+v+|u-v|)$ $\quad u\wedge v=\frac{1}{2}(u+v-|u-v|)$.

<u>Corolario 3</u>: $u: X \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable $\iff$ u^+, u^- son mesurables. $\square$

<u>Teorema</u>: (Lema de Factoración)
Sea $T:(X,\mathcal{A}) \longrightarrow (X',\mathcal{A}')$ un mapa mesurable. Entonces, la función $u: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es mesurable $\iff$ $u = w \circ T$, donde $w: X' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es mesurable.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \subseteq X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "u"'] & & X' \supseteq \mathcal{A}' \arrow[dl, "w"] \\
& \overline{\mathbb{R}} \arrow[d, phantom, "\cup"] & \\
& \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad w \circ T = u
$$

Teorema (Lema de Clases Monótonas, para funciones).

Sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia $\cap$-estable, y sea V un espacio vectorial de funciones $u: X \to \mathbb{R}$ tal que

1) $\mathbb{1} = \mathbb{1}_X \in V$ y $\mathbb{1}_G \in V$, $\forall G \in \mathcal{G}$.

2) para toda secuencia $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots \leq u_n \in V$, con

$$u(x) = \sup_{1 \leq i \leq n} u_i(x) < \infty, \ \forall x, \ \Rightarrow u(x) \in V.$$

Entonces $\mathcal{M}(\sigma(\mathcal{G})) \subseteq V$. $\square$