Funciones Simples:

Def: Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable. Las funciones de la forma

$$(*) \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{1}_{A_i}(x), \qquad \text{con } N \in \mathbb{N},\ c_i \in \mathbb{R},\ A_i \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos}$$

se llaman funciones simples.

Si tenemos $f(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{1}_{B_i}(x)$ $(**)$ donde $N \in \mathbb{N}$, $c_i \in \mathbb{R}$, $B_i \in \mathcal{A}$ y $X = \bigsqcup_{i=1}^{N} B_i$

decimos que f está en su representación estándar.

Obs! $(*)$ y $(**)$ no son únicas!

$f = f_1 + f_2$

Ej: $A \in \mathcal{A}$. $\mathbb{1}_A(x)$

$f(x) = 1 \cdot \mathbb{1}_A(x)$

Si tomamos la partición $P = \{A, A^c\}$, entonces

$$f(x) = \mathbb{1}_A(x) + 0 \cdot \mathbb{1}_{A^c}(x) \longleftarrow \text{representación estándar.}$$

Prop: Toda función simple $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ es mesurable.

Prueba: Ejemplo 2

Prop: Toda función mesurable $u: X \to \mathbb{R}$ que toma sólo un número finito de valores, es simple.

Prueba: Sea $u(X) = \{y_1, y_2, \dots, y_N\} \subseteq \mathbb{R}$ finito. Los conjuntos de la forma $\{u=a\}$, $a \in u(X)$, forman una partición de X.

Además, $\{u=a\} = \underbrace{\{u \geq a\}}_{\in \mathcal{A}} - \underbrace{\{u > a\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \{u=a\}$ son mesurables.

De ahí

$$u(x) = \sum_{a \in u(X)} a \cdot \mathbb{1}_{\{u=a\}}(x) = \sum_{i=1}^{N} y_i \, \mathbb{1}_{\{u=y_i\}}(x)$$

y como $X = \dot{\bigcup}_{i=1}^{N} \{u=y_i\} \Rightarrow u$ es simple. $\square$

Teorema: (Sombrero lemma).

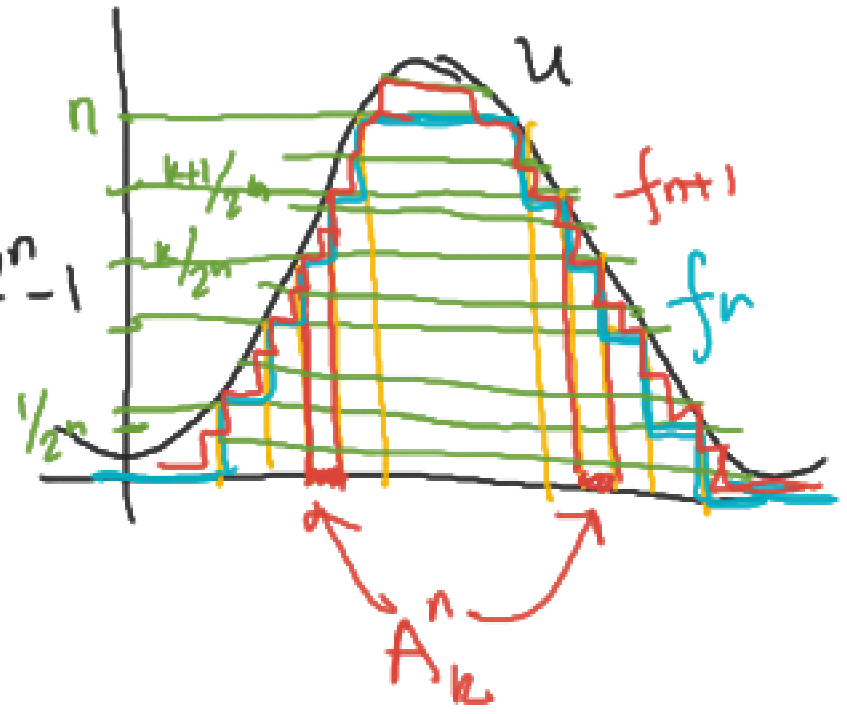
Sea $(X,\mathcal{A})$ espacio mensurable. Toda función mensurable, no-negativa, $u: X \to \overline{\mathbb{R}}$ es el límite de una secuencia creciente de funciones simple $f_n: X \to \mathbb{R}$. Esto es,

$$u(x) = \sup_n f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad \forall x \in X.$$

Idea de la prueba:

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y definimos los conjuntos de nivel

$$A_k^n = \begin{cases} \{ k/2^n \leq u < (k+1)/2^n \}; & k = 0,1,2,\dots, n2^n - 1 \\ \{u \geq n\}; & k = n2^n. \end{cases}$$



Las funciones aproximantes son

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{A_k^n}(x) \quad \text{es simple.}$$

Con las f_n así definidas, tenemos:

$(u \geq 0)$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq u,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \bullet\ |u(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n},\ \text{si}\ u(x) \leq n \\ \bullet\ A_k^n = \left\{\frac{k}{2^n} \leq u < \frac{k+1}{2^n}\right\} = \underbrace{\left\{\frac{k}{2^n} \leq u\right\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\left\{u < \frac{k+1}{2^n}\right\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}. \\ \quad A_{n2^n}^n = \{u > n\} \in \mathcal{A}. \end{array}\right\} \Rightarrow f_n \nearrow u.$$

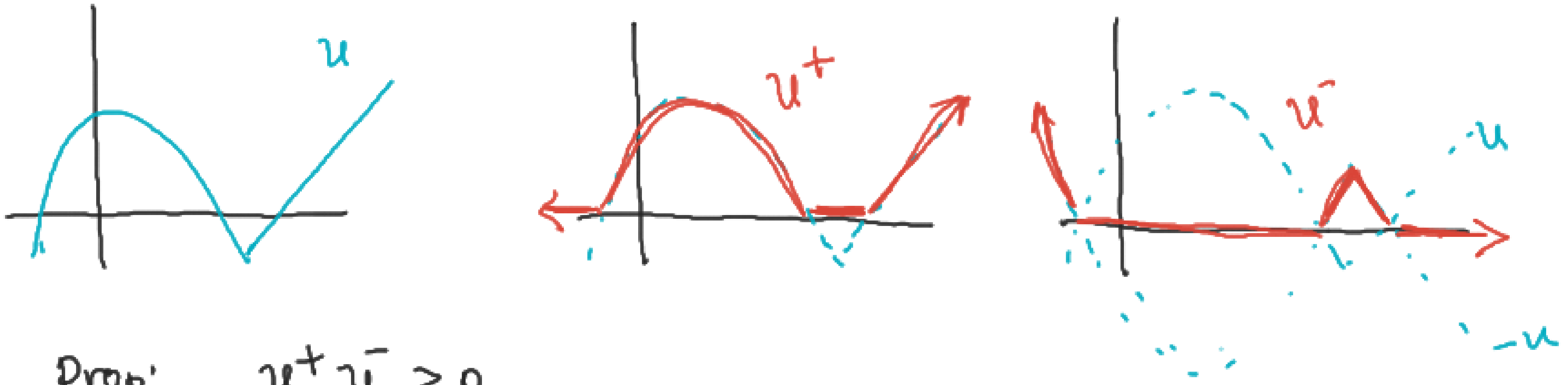
$\square$

<u>Corolario I</u> Sea $(X, \mathcal{A})$ esp. mesurable. Toda función mesurable $u: X \to \overline{\mathbb{R}}$ es el límite de funciones simples $\{f_n\}$, tales que $|f_n| \leq |u|$. Si u es limitada, este límite es uniforme.

<u>Prueba</u>: Sea $u: X \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable. Definimos $u^+, u^-: X \to \overline{\mathbb{R}}$

$$u^+(x) = \begin{cases} u(x); & u(x) \geq 0 \\ 0; & u(x) < 0 \end{cases} \qquad u^-(x) = \begin{cases} -u(x); & u(x) \leq 0 \\ 0; & u(x) > 0 \end{cases}$$

$$= \max\{0, u(x)\} \qquad\qquad = -\min\{0, u(x)\} = \max\{0, -u(x)\}$$



Prop: $u^+, u^- \geq 0$.

$$u = u^+ - u^- \quad \text{y} \quad |u| = u^+ + u^-.$$

u^+, u^- se llaman la parte positiva de u, y la parte negativa de u

Tome $\boxed{u = u^+ - u^-}$ con $u^+, u^- : X \to \overline{\mathbb{R}}$ no-negativas.

Como $\{u^+ > a\} = \begin{cases} \{u > a\}; & a \geq 0 \\ X; & a < 0 \end{cases}$ $\qquad \{u^- \geq a\} = \begin{cases} \{u \leq -a\}; & a \geq 0 \\ X; & a < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow u^+, u^-$ son mesurables.

Por el Teorema anterior, existen funciones simples $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ tales que $f_n \nearrow u^+$ y $g_n \nearrow u^-$

Tome $\{f_n-g_n\}_{n\geq 1}$. Sabemos que como f_n, g_n son simples

$\Rightarrow$ existen $A_1,\dots,A_N \in \mathcal{A}$ disjuntos

$B_1,\dots,B_M \in \mathcal{A}$ disjuntos con

$$f_n = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{1}_{A_i} \quad y \quad g_n = \sum_{j=1}^{M} d_j \mathbb{1}_{B_j}.$$

$$\Rightarrow f_n - g_n = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{1}_{A_i} - \sum_{j=1}^{M} d_j \mathbb{1}_{B_j} = \sum_{k=1}^{L} \alpha_k \mathbb{1}_{C_k} \quad C_k = A_i \cap B_j$$

$\Rightarrow$ f_n-g_n son funciones simples.

y $\lim_{n\to\infty}(f_n-g_n) = \lim_{n\to\infty} f_n - \lim_{n\to\infty} g_n = u^+ - u^- = u$.

Además. $|f_n-g_n| \leq |f_n| + |g_n| \leq u^+ + u^- = |u|$.

Por último, si u es limitada, digamos $|u(x)| \leq c$, $\forall x \in X$, Entonces, para todo $n \geq N$

Para $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$
$\Rightarrow |f_n - u^+| < \varepsilon$, $|g_n - u^-| < \varepsilon$

$$
\begin{aligned}
|(f_n - g_n)(x) - u(x)| &= |(f_n - g_n)(x) - (u^+ - u^-)(x)| \\
&= |(f_n - u^+)(x) - (g_n - u^-)(x)| \\
&\leq |f_n(x) - u^+(x)| + |g_n(x) - u^-(x)| \\
&\leq 1/2^n + 1/2^n, \quad \forall x \\
&\leq 1/2^{n-1}, \quad \forall x.
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad f_n - g_n \xrightarrow{\text{unif.}} u.$ $\square$.

$u^+ - u^-$