Funciones Mesurables:

$$u : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es mesurable } \iff u^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$u : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

La clase anterior vimos que si $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{G})$. $\mathcal{G}$ conjunto generador,

$$u : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es mesurable } \iff u^{-1}(G) \in \mathcal{A}, \ \forall G \in \mathcal{G}.$$

Recordemos que existen varios generadores para $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

- $\mathcal{G} = \{ [a, \infty) : a \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{Q} \}$
- $\{ (-\infty, a] : a \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{Q} \} = \mathcal{G}$
- $\mathcal{G} = \{ (a, \infty) : a \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{Q} \}$
- $\{ (-\infty, a) : a \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{Q} \} = \mathcal{G}$

Para ver que $u : X \to \mathbb{R}$ es mesurable, bastaría verificar

$$u^{-1}([a, \infty)) = \{ x \in X : u(x) \in [a, \infty) \} = \{ x \in X : u(x) \geq a \}$$

$$= \{ u \geq a \} \in \mathcal{A}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

<u>Notaciones</u>: • $\{u \geq a\} = u^{-1}([a,\infty))$ $\qquad \{u \leq a\} = u^{-1}((-\infty, a])$

$\{u > a\} = u^{-1}((a,\infty))$ $\qquad \{u < a\} = u^{-1}((-\infty, a))$.

- $\{a \leq u \leq b\} = u^{-1}([a,b])$ ...

- Si $u, v : X \to \mathbb{R}$, denotamos

$$\{u \leq v\} = \{x \in X : u(x) \leq v(x)\} \qquad \{u < v\}, \{u \geq v\}, \{u > v\}$$
$$\{u = v\}, \{u \neq v\}$$

<u>Lema</u>: Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable. Las siguientes son equivalentes:

i) $u : X \to \mathbb{R}$ mesurable.

ii) $\{u \geq a\} \in \mathcal{A}$, $\forall a \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{Q}$.

iii) $\{u > a\} \in \mathcal{A}$, $\forall a \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{Q}$.

iv) $\{u \leq a\} \in \mathcal{A}$, $\forall a \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{Q}$.

v) $\{u < a\} \in \mathcal{A}$, $\forall a \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{Q}$.

<u>Prueba</u>: Consecuencia del lema de la clase anterior. $\square$

Recta real extendida: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$.

$-\infty < x,\ \forall x \in \mathbb{R}$; $x < +\infty,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ hereda las propiedades de orden de $\mathbb{R}$

$x, y \in \mathbb{R}$

$+$	0	y	$-\infty$	$+\infty$
0	0	y	$-\infty$	$+\infty$
x	x	$x+y$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\cdot$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\cdot$	$+\infty$

$\cdot$	0	$\pm y$	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	0
$\pm x$	0	xy	$\mp\infty$	$\pm\infty$
$-\infty$	0	$\mp\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	0	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$0 \cdot \infty$

Obs! $\overline{\mathbb{R}}$ no es un cuerpo: $+\infty - \infty$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ no están determinados

Extendemos los borelianos a $\overline{\mathbb{R}}$: Definimos $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ por

$B^* \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \iff B^* = B \cup S$, donde

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $S \in \{\emptyset, \{-\infty\}, \{+\infty\}, \{\pm\infty\}\}$.

Prop 1: $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ es una σ-álgebra, y su traza respecto de $\mathbb{R}$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

Prop 2: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \cap \mathbb{R} = \{A \cap \mathbb{R} : A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\}$. $\square$

Lema: $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ es generada por cualquiera de las siguientes clases:

- $\overline{G} = \{[a,+\infty] : a \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{Q}\}$
- $\overline{G} = \{[-\infty,a] : a \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{Q}\}$
- $\overline{G} = \{(a,+\infty] : a \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{Q}\}$
- $\overline{G} = \{[-\infty,a) : a \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{Q}\}$.

Prueba: Mostramos que $\overline{G} = \{[a,+\infty] : a \in \mathbb{R}\}$ genera a $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Tomamos $\Sigma = \sigma(\overline{G}) = \sigma\left([a,+\infty] : a \in \mathbb{R}\right)$

Como $[a,+\infty] = \underbrace{[a,+\infty)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \cup \underbrace{\{+\infty\}}_{\in} \Rightarrow [a,+\infty] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

$$\Rightarrow \quad \bar{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \quad \Rightarrow \quad \Sigma = \sigma(\bar{\mathcal{G}}) \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}).$$

Por otro lado, $[a,b) = \underbrace{[a,+\infty]}_{\in\Sigma} - \underbrace{[b,+\infty]}_{\in\Sigma} \in \Sigma \quad , \forall a,b \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \Sigma$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \Sigma \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$$

$$\{+\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n,+\infty] \in \Sigma, \quad \{-\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [-\infty,-n] \in \Sigma$$

$\Rightarrow \Sigma$ contiene todo conjunto de la forma $B \cup S$, donde

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $S = \{\emptyset, \{+\infty\}, \{-\infty\}, \{\pm\infty\}\}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \subseteq \Sigma. \qquad \square$$

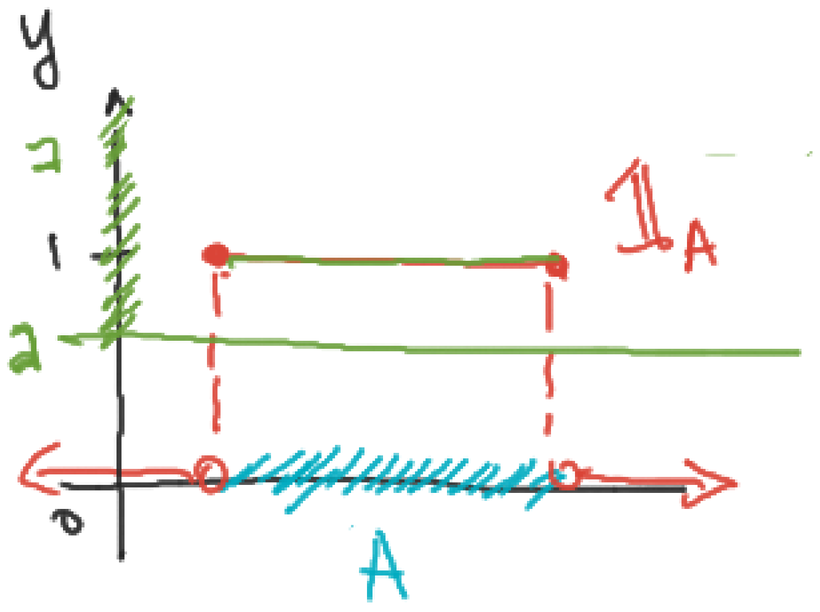
<u>Notación:</u> $(X,\mathcal{A})$ esp. mesurable, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ es el conjunto de todas las funciones mesurables $u: X \to \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_{\bar{\mathbb{R}}} = \mathcal{M}_{\bar{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$.

Ejemplos: 1. Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable. La función indicadora

$\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$, $A \subseteq X$, dada por

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & x \notin A \end{cases}.$$

$[a, \infty)$ $a \in \mathbb{R}$



$\mathbb{1}_A$ es mesurable $\iff$ A es mesurable $\iff$ $A \in \mathcal{A}$.

$$\{\mathbb{1}_A \geq a\} = \{x \in X : \mathbb{1}_A(x) \geq a\} = \begin{cases} \emptyset; & a > 1 \\ A; & 0 < a \leq 1 \\ X; & a \leq 0 \end{cases}$$

$\mathbb{1}_A$ es mesurable $\iff$ $\emptyset, A, X$ son mesurables

$\iff$ $\emptyset, A, X \in \mathcal{A}$

$\iff$ $A \in \mathcal{A}$. $\square$

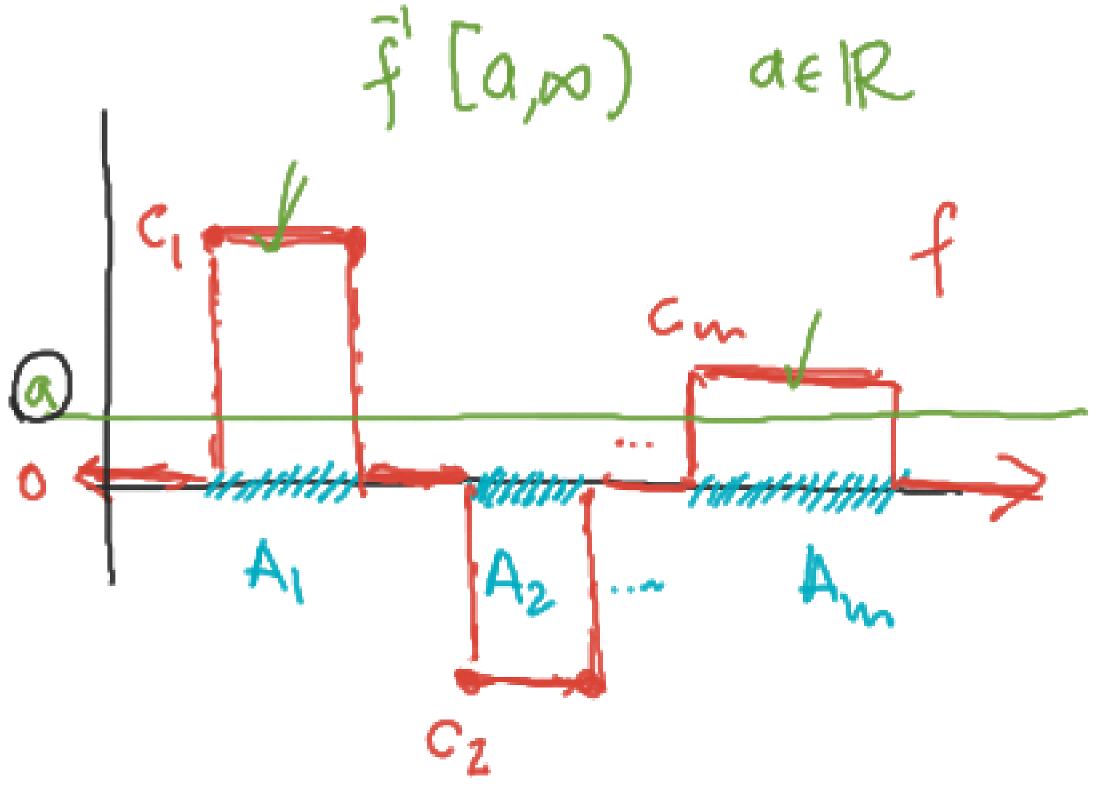
Ejemplo: ② Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable, y tomemos

$A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{A}$, mutuamente disjuntos, y sean $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$

La función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$$

es mesurable.



Observar que $f^{-1}([a,\infty)) = \bigsqcup_{\substack{i=1 \\ c_i \geq a}}^{m} A_i \in \mathcal{A}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.