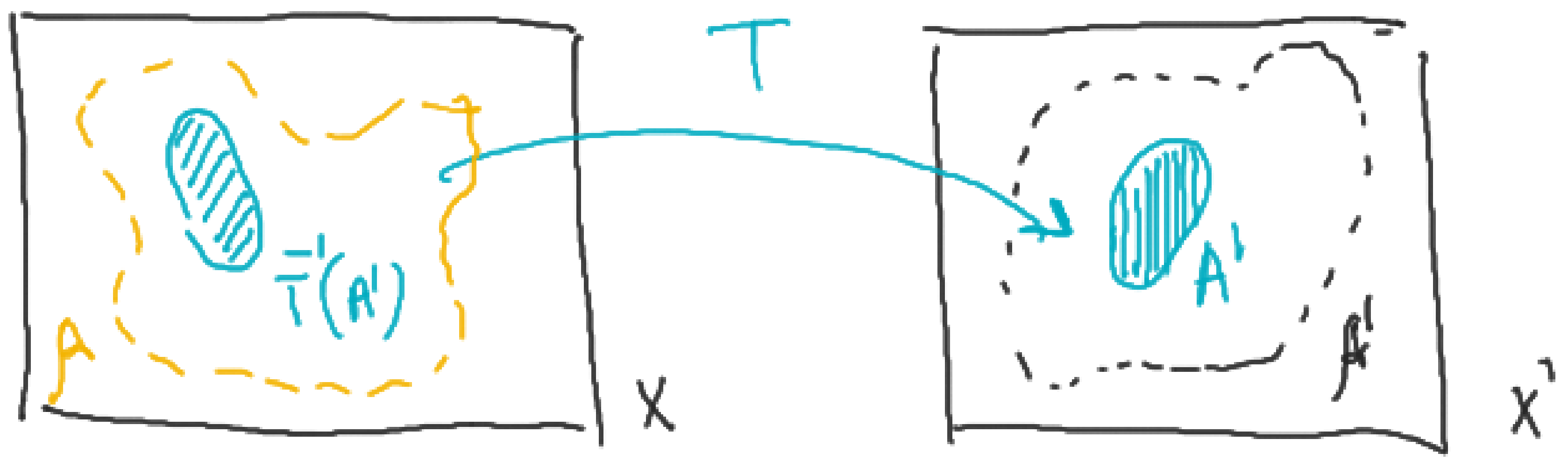
Funciones Mesurables:

Def: Sean $(X, \mathcal{A})$ y $(X', \mathcal{A}')$ espacios mesurables. Un mapa $T: X \to X'$ se llama mesurable (ó $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-mesurable) si $T^{-1}(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{A}$.

Esto es

$$T^{-1}(A') \in \mathcal{A}, \quad \forall A' \in \mathcal{A}'.$$



En el caso en que $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{A}' = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, entonces T se llama Borel-mesurable.

Lema: Sean $(X,\mathcal{A})$ y $(X',\mathcal{A}')$ espacios mesurables, con $\mathcal{A}'=\sigma(\mathcal{G}')$, con $\mathcal{G}'\subseteq \mathcal{P}(X')$ conjunto generador. Entonces, $T: X\to X'$ es mesurable $\iff T^{-1}(\mathcal{G}')\subseteq \mathcal{A}$. Esto es

$$T^{-1}(A')\in\mathcal{A}\ ,\ \forall A'\in\mathcal{G}'.$$

Prueba: $(\Rightarrow)$ Si T es mesurable $\Rightarrow T^{-1}(\mathcal{G}')\subseteq\mathcal{A}$, pues $\mathcal{G}'\subseteq\mathcal{A}'$.

$(\Leftarrow)$ Consideramos el sistema

$$\Sigma=\{A'\subseteq X' : T^{-1}(A')\subseteq\mathcal{A}\}\subseteq \mathcal{P}(X').$$

- $T^{-1}(\phi)=\emptyset\in\mathcal{A} \Rightarrow \emptyset\in\Sigma.$
- $A\in\Sigma \Rightarrow T^{-1}(A)\in\mathcal{A} \Rightarrow T^{-1}(A^c)=\left(T^{-1}(A)\right)^c\in\mathcal{A}\Rightarrow A^c\in\Sigma.$
- Si $\{A_n\}_{n\geq 1}\subseteq\Sigma \Rightarrow T^{-1}(A_n)\in\mathcal{A},\ \forall n\in\mathbb{N}$. Luego
  $T^{-1}\left(\bigcup_n A_n\right)=\bigcup_n T^{-1}(A_n)\in\mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_n A_n\in\Sigma.$

$\Rightarrow \Sigma$ es una σ-álgebra en X'.

Por hipótesis, $T^{-1}(G) \in \mathcal{A}, \ \forall G \subseteq \mathcal{G}'$ $\Rightarrow$ $\mathcal{G}' \subseteq \Sigma$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{G}') \subseteq \Sigma$ $\Rightarrow$ $T^{-1}(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{A}$.

$\square$

<u>Obs!</u> Si $(X, \mathcal{O})$ es un espacio topológico ($\mathcal{O}$ = abiertos).

consideramos la σ-álgebra de Borel de X, $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O})$.

$X \longleftarrow$ estruc. topológica

$\;\;\;\nwarrow$ estructura medible

En ese caso, todo mapa continuo en X es un mapa medible.

<u>Cor</u>: Sean $(X, \mathcal{O})$ y $(X', \mathcal{O}')$ esp. topológicos y considere $(X, \mathcal{B}(X))$ y $(X', \mathcal{B}(X'))$. Entonces, todo mapa $T: X \to X'$ continuo, es medible.

Prueba: Como $T: X \to X'$ es continua, $T^{-1}(\mathcal{O}') \subseteq \mathcal{O}$.

Luego, $T^{-1}(\mathcal{O}') \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{B}(X)$. Por el lema anterior,

$T^{-1}(\mathcal{B}(X')) \subseteq \mathcal{B}(X) \Rightarrow T$ es mesurable. $\square$

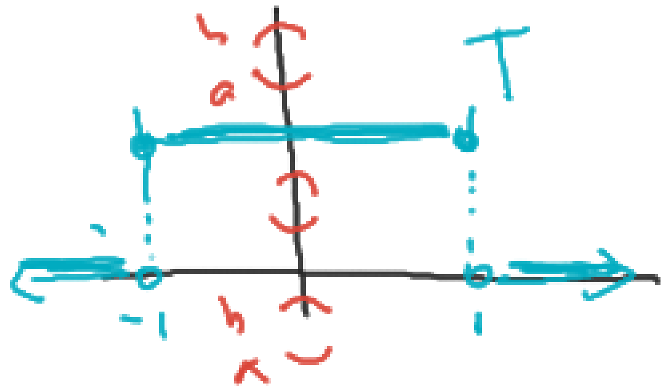
Obs! No todo mapa mesurable es continuo!!

$$\text{continuo} \Rightarrow \text{mes.}$$
$$\not\Leftarrow$$

Ej: $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$T(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1; & -1 \leq x \leq 1 \\ 0; & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$$T^{-1}((a,b)) = \begin{cases} \emptyset; & a,b \leq 0 \\ \emptyset; & 0 \leq a,b \leq 1 \\ \emptyset; & 1 \leq a,b \\ \{0\}; & a < 0 < b < 1 \\ \{1\}; & 0 < a < 1 < b \\ \{0,1\}; & a < 0 < 1 < b \end{cases}$$



T es mesurable pero no es continua.

$$T^{-1}((a,b)) \in \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow T \text{ es mesurable.}$$

Prop: Sean $(X_1,\mathcal{A}_1)$, $(X_2,\mathcal{A}_2)$ y $(X_3,\mathcal{A}_3)$ esp. mesurables. Si $T_1: X_1\longrightarrow X_2$ y $T_2: X_2\rightarrow X_3$ son mesurables, entonces

$T_2\circ T_1 : X_1\longrightarrow X_3$ es mesurable.

Prueba: $(T_2\circ T_1)^{-1}(\mathcal{A}_3) = T_1^{-1}\Big[\underbrace{T_2^{-1}(\mathcal{A}_3)}_{\in\mathcal{A}_2}\Big] \subseteq T_1^{-1}(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1.$ $\square$.

Dado $\overset{\text{esp. mesurable}}{(X',\mathcal{A}')}$ y dado $T: X\longrightarrow X'$, en ocasiones podemos no saber si existe alguna σ-álg. X. ¿Cuál el la menor σ-alg. en X para que T sea mesurable?

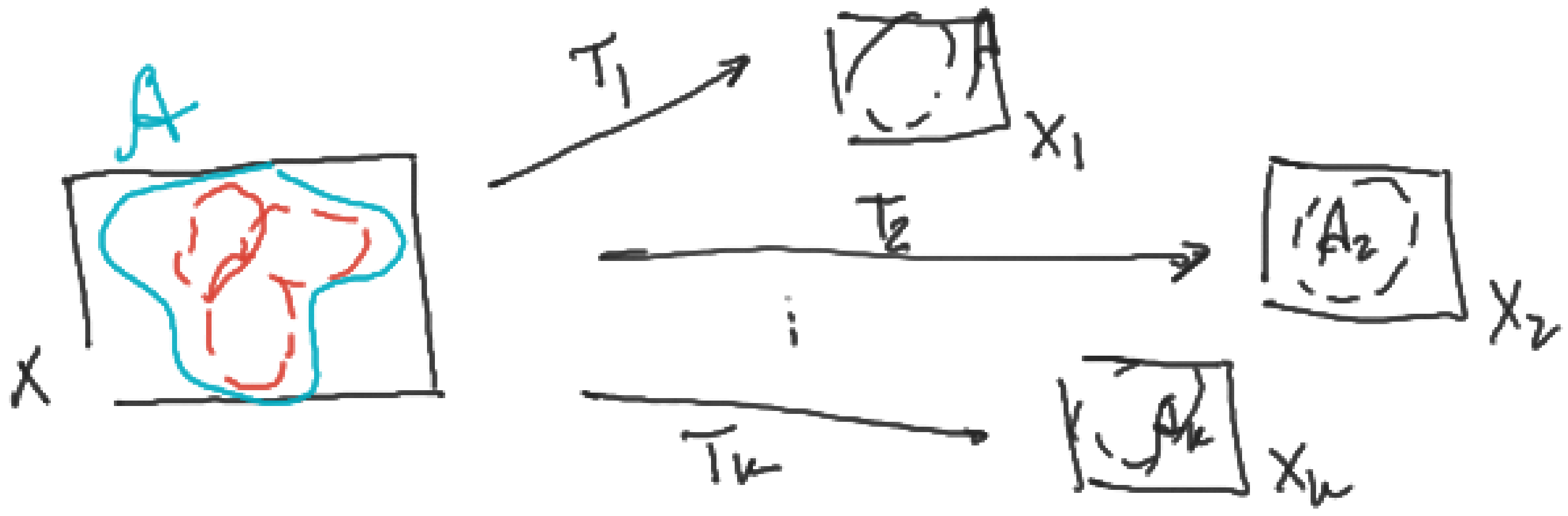
- T se puede hacer mesurable, colocando en X la σ-álgebra $\mathcal{P}(X)$

La menor σ-álgebra en X para que T sea mesurable

$$\mathcal{A} = \sigma\left(T^{-1}(\mathcal{A}') \right).$$

Si $\{(X_i, \mathcal{A}_i)\}_{i\in I}$ son esp. mesurables y $T_i : X \longrightarrow X_i$. La menor σ-álgebra en X que hace mesurables a todos los T_i simultáneamente es

$$\mathcal{A} = \sigma\left(\bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \right).$$

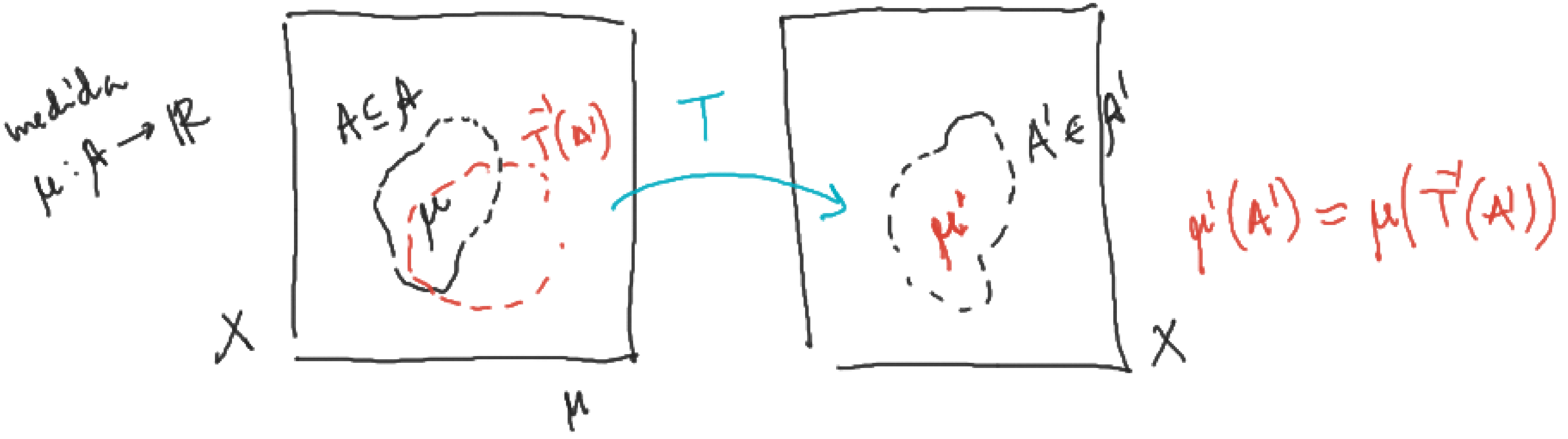


Def: $\mathcal{A} = \sigma\left(\bigcup_i T_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \right)$ se llama la σ-álg. generada por $\{T_i\}_{i\in I}$.

Teorema: Sean $(X,\mathcal{A})$ y $(X',\mathcal{A}')$ espacios mensurables, y $T: X \to X'$ un mapa mensurable. Para toda medida μ en $(X,\mathcal{A})$ la función $\mu': \mathcal{A}' \to \mathbb{R}$

$$\mu'(A') = \mu(T^{-1}(A')), \quad \forall A' \in \mathcal{A}'.$$

define una medida en $(X',\mathcal{A}')$.



Def: La medida μ' se llama el <u>push-forward</u> de μ bajo T.

Notación: $T(\mu)$. $T_*\mu$ ó $\mu \circ T$.

Prueba: Mostramos que μ' es medida sobre $\mathcal{A}'$.

- $\mu'(\emptyset) = \mu(T^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$.
- Sea $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}'$ disjuntos. Entonces las preimágenes $T^{-1}(A_n)$ también son disjuntos

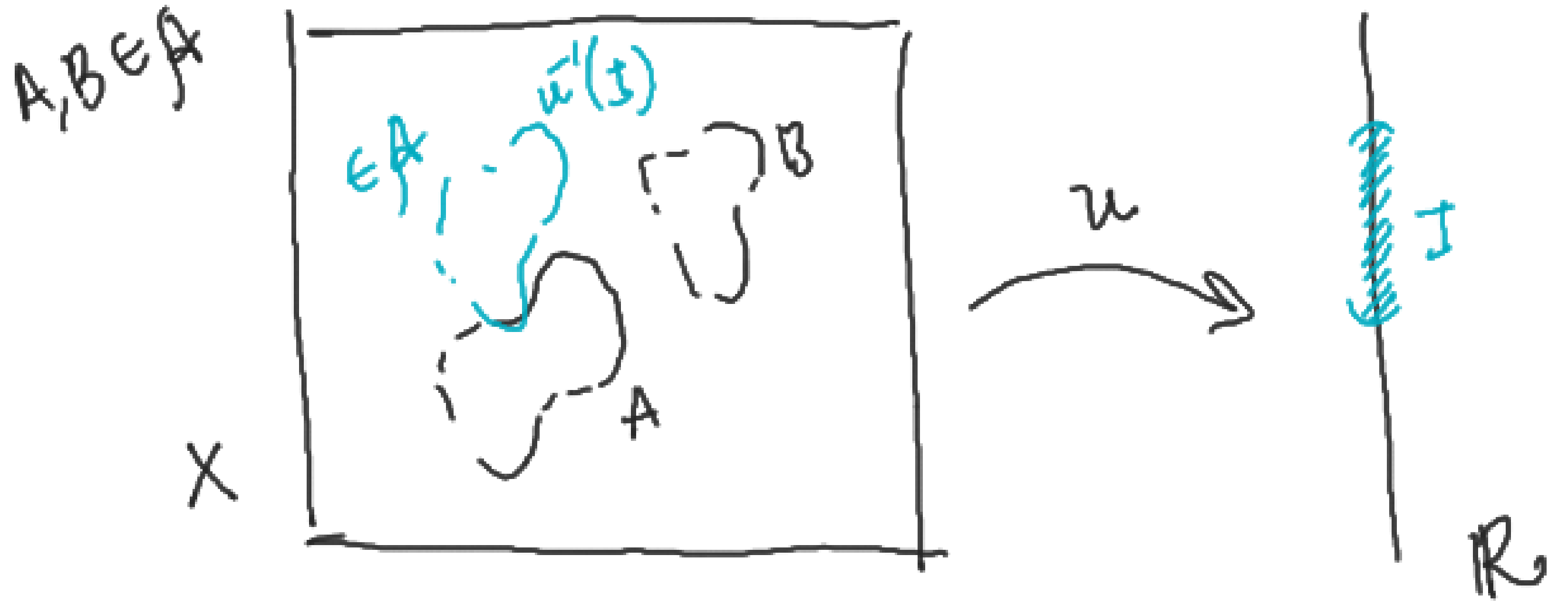
$$T^{-1}(A_n) \cap T^{-1}(A_m) = T^{-1}(\underbrace{A_n \cap A_m}_{\emptyset}) = \emptyset \qquad \forall m \neq n.$$

$$\Rightarrow \mu'\Big(\biguplus_{n\geq 1} A_n\Big) = \mu\Big(T^{-1}\Big(\biguplus_{n\geq 1} A_n\Big)\Big) = \mu\Big(\biguplus_{n\geq 1} T^{-1}(A_n)\Big)$$

$$= \sum_{n\geq 1} \mu(T^{-1}(A_n)) = \sum_{n\geq 1} \mu'(A_n).$$

$\therefore$ μ' medida. $\square$

Def: Una función mesurable $u : X \to \mathbb{R}$ es un mapa mesurable de un esp. mesurable $(X, \mathcal{A})$ cualquiera a $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.



Nota: Cuando $\mathcal{H} = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad, las funciones medibles $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ se llaman variables aleatorias.

Notación: X, Y, Z (letras mayúsculas) $X : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$